

Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning i Linjär algebra komplettering, SF1605, måndagen den 11 januari 2010, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Problem:

1. Betrakta vektorrummet R^5 .
 - (a) (1p) Bestäm en bas för det delrum L till R^5 som spänns upp av vektorerna $(1, 2, 1, 3, 2)$, $(2, 0, 0, 3, 2)$, $(3, 3, 2, 7, 5)$ och $(1, 1, 1, 1, 1)$.
 - (b) (1p) Visa att vektorn $\bar{u} = (1, -2, 1, 0, 0)$ inte tillhör L .
 - (c) (1p) Om du hittar ytterligare en vektor \bar{v} som inte tillhör L och som inte är parallell med \bar{u} , kommer då alltid \bar{u} och \bar{v} tillsammans med en bas för det ovan givna delrummet L att bilda en bas för R^5 . Motivera ditt svar!
2. En linjär avbildning A från R^4 till R^5 definieras av att $A(1, 1, 1, 1) = (1, 2, 1, 0, 1)$, $A(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0, 1)$, $A(0, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 1, 0)$ och $A(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 0, 0, 0)$.
 - (a) (1p) Ange på ett lämpligt sätt en matris som beskriver avbildningen.
 - (b) (1p) Bestäm avbildningens kärna.
 - (c) (1p) Bestäm dimensionen hos avbildningens bildrum ("range").
3. (3p) Visa med hjälp av induktion att för varje naturligt tal $n \geq 1$ gäller att talet 5 delar talet $4^{2n} - 1$.
4. (3p) Betrakta R^5 . Bestäm en bas för snittet mellan delrummen L och M , om L spänns upp av (genereras av) vektorerna $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(0, 1, 0, 1, 0)$ och $(3, 2, 1, 0, 1)$ och M spänns upp av $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 1, 1)$ och $(1, 0, 1, 0, 1)$.
(Snittet mellan två vektorrum består av vektorrummens gemensamma vektorer.)
5. Vi betraktar vektorrummet \mathcal{P}_3 av alla polynom av grad högst lika med 2. Summan av två vektorer $p(t)$ och $q(t)$, liksom multiplikation med skalär, ges av "vanlig" polynomkalkyl, dvs $(p + q)(t) = p(t) + q(t)$ respektive $(\lambda p)(t) = \lambda p(t)$.
 - (a) (1p) Finns det några värden på talet a som gör att produktbildningen

$$(p | q) = p(1)q(1) + ap(2)q(2) + p(3)q(3),$$
 utgör en inre produkt i \mathcal{P}_3 . Ange i så fall dessa värden på talet a . (Motivera din lösning!)
 - (b) (2p) Bestäm en inre produkt i \mathcal{P}_3 sådan att polynomet t projiceras på polynomet 1 i det delrum till \mathcal{P}_3 som spänns upp av polynomen $1, 1 + t^2$, eller visa att en sådan inre produkt saknas.