

Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kompetteringskursen i Linjär algebra, 5B1110, fredagen den 9 januari 2004.

1. Påståendet är sant för $n = 0$ eftersom $1 = (2 + 0 + 0)/2$.

Vi visar nu att om $1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3n) = (2 + 5n + 3n^2)/2$ så kommer $1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3(n + 1)) = (2 + 5(n + 1) + 3(n + 1)^2)/2$.

Vi finner nämligen att om $1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3n) = (2 + 5n + 3n^2)/2$ så gäller att

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3(n + 1)) &= 1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3n) + (1 + 3(n + 1)) = \\ &= \frac{2 + 5n + 3n^2}{2} + (1 + 3(n + 1)) = \frac{2 + 5n + 3n^2 + 2(1 + 3(n + 1))}{2} = \\ &= \frac{2 + 5(n + 1) + 3(n + 1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är nu påståendet sant.

2. Då

$$T(1) = \frac{\langle 1, 1 + x \rangle}{\langle 1 + x, 1 + x \rangle} (1 + x) = \frac{\int_{-1}^1 1 + x}{\int_{-1}^1 1 + 2x + x^2} (1 + x) = \frac{3}{4} (1 + x) = \frac{3}{4} 1 + \frac{3}{4} x$$

och

$$T(x) = \frac{\langle x, 1 + x \rangle}{\langle 1 + x, 1 + x \rangle} (1 + x) = \frac{\int_{-1}^1 x + x^2}{\int_{-1}^1 1 + 2x + x^2} (1 + x) = \frac{1}{4} (1 + x) = \frac{1}{4} 1 + \frac{1}{4} x$$

så blir avbildningens matris

$$T = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3. Vi använder Gram-Schmidts metod för att hitta en ortogonalbas. Låt $f_1 = (1, 1, -1, 2, 3)$ och

$$f_2 = (2, 3, 1, 3, 2) - \frac{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (2, 3, 1, 3, 2)}{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1, 2, 3)} (1, 1, -1, 2, 3) = (1, 2, 2, 1, -1).$$

Vidare låter vi

$$\begin{aligned} f_3 &= (3, 1, 0, -3, 2) - \frac{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (3, 1, 0, -3, 2)}{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1, 2, 3)} (1, 1, -1, 2, 3) - \\ &= \frac{(1, 2, 2, 1, -1) \cdot (3, 1, 0, -3, 2)}{(1, 2, 2, 1, -1) \cdot (1, 2, 2, 1, -1)} (1, 2, 2, 1, -1) = \frac{1}{4} (11, 3, -1, -14, 5). \end{aligned}$$

Vi normerar dessa vektorer och får

$$\text{Svar: } e_1 = \frac{1}{4} (1, 1, -1, 2, 3), e_2 = \frac{1}{\sqrt{11}} (1, 1, -1, 2, 3), e_3 = \frac{1}{\sqrt{352}} (11, 3, -1, -14, 5).$$

4. b) En vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) tillhör det sökta ortogonala komplementet precis då

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (1, 0, 0, 1) = 0 \quad \text{och} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0, 2, 0, 1) = 0.$$

Dessa ekvationer ger ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer vars lösningsmängd är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(2, 1, 0, -2) + t(0, 0, 1, 0)$$

och alltså

Svar: $\text{span}\{(2, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 0)\}$

5. a) Om $\langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle$ för alla y så gäller att $\langle x_1 - x_2, y \rangle = 0$ för alla y , dvs $x_1 - x_2$ är ortogonal mot alla vektorer y i vektorrummet.

b) Låt $y = x_1 - x_2$. Vi får då att $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = 0$ med enda möjligheten att $x_1 - x_2 = 0$.