

Uppgifter inför KS2, Matematik II för CL. VT10.

1. Bestäm alla värden på a, b och c så att matrisen A blir symmetrisk

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Bestäm inversen till matrisen A då:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Visa att $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$ är en ON matris genom att

- beräkna $A^T A$
- studera radvektorerna i A
- studera kolonnvektorerna i A.

4. Bestäm inversen till matrisen A i uppgift 3 .

5. Vilka av följande matriser är ON-matriser och bestäm i sådana fall den tillhörande inversen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande

matriser:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

7. Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till

följande matriser:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} .$$

8. Bestäm egenvärden och tre parvis ortogonala och normerade egenvektorer till

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

9. Bestäm en ortogonalmatrix P sådan att $P^T A P$ blir en diagonalmatrix D samt ange D då A är matrisen i uppgift 8.

10. Transformera följande ekvationer till huvudaxelform

$$\begin{array}{ll} a) -2x^2 + 4xy + y^2 & b) 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz \\ c) 3x^2 + 2xy + 3y^2 & d) x^2 + 4xy + y^2 \quad e) -x^2 + 4xy - 4yz + z^2 \end{array}$$

11. Ange den geometriska betydelsen om uttrycken i 10a) – e) är

$$a) = 1 \quad b) = -1 \quad c) = 0$$

12. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{11} .

Svar:

1. $a=11, b=-9, c=-13$

2. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b) invers finns ej c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 12 \\ 5 & 25 & 25 \\ 0 & 4 & 3 \\ -3 & 5 & 5 \\ -5 & -12 & 16 \\ 5 & 25 & 25 \end{pmatrix}$

5 a) b) och d) är ON-matriser och inversen är dess transponat.

6. a) $\lambda_1 = -1, \bar{x} = \pm(4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$; $\lambda_2 = -2, \bar{x} = \pm(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$.

b) $\lambda_1 = -3, x_1 = \pm(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$; $\lambda_2 = 2, x_2 = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$,

7 a)

$$\lambda_1 = -2, x_1 = \pm(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}, 0); \lambda_2 = 4, \bar{x}_2 = \pm(5/\sqrt{129}, -10/\sqrt{129}, -2/\sqrt{129}); \lambda_3 = 6, x_3 = \pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$$

b) $\lambda_1 = -3, x_1 = \pm(1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$; $\lambda_2 = 3, \bar{x}_2 = \pm(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$; $\lambda_3 = 3, x_3 = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

8.

$$\lambda_1 = -6, x_1 = \pm(1/3, -2/3, 2/3); \lambda_{2,3} = 3, x_2 = \pm(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0), x_3 = \pm(2/(3\sqrt{5}), -4/(3\sqrt{5}), 5/(3\sqrt{5})), (tex)$$

9. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & -5/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix} D = \text{diag}(-6, 3, 3)$

10. a) $-3\xi^2 + 2\eta^2$ b) $-6\xi^2 + 3\eta^2 + 3\tau^2$ c) $2\xi^2 + 4\eta^2$ d) $-\xi^2 + 3\eta^2$ e) $-3\xi^2 + 3\tau^2$

11.= 1 : a) hyperbel b) enmantlad rotationshyperboloid c) ellips d) hyperbel
e)hyperbolisk cylinder

=-1 : a) hyperbel b) tvåmantlad rotationshyperboloid c) ingenting d) hyperbel e)
hyperbolisk cylinder

=0 : a) två skilda räta linjer genom origo b) cirkulär dubbelkon c) origo d)
två skilda räta linjer genom origo e) två skilda plan genom origo.

1 2. $\begin{pmatrix} -1 & 10237 & -2047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10245 & -2048 \end{pmatrix}$