Uppgifter inför KS3 den 22 mars 2010. CL-09

1 a) Summan av de n första elementen i den aritmetiska talföljden 60, 56, 52, 48 ….betecknas med S_n . För vilka n gäller $300 < S_n < 420$?

b) Den geometriska serien $x + x(2-3x) + x(2-3x)^2 + ...$ är given . Vilken är dess summa? För vilket x är summan 2 resp. -3 ?

c) Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} e^{N-n}$

d) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)$

e) Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \frac{4}{3}$

f) Visa att $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \frac{1}{3(N-1)^3}$

2. Avgör om följande serier konvergerar:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n+2}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^3$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - \cos\frac{\pi}{n}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+n} - n^2\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(\frac{n+1}{n}\right)$

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^{n+\frac{1}{n}}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}\cos n\pi$

4. För vilka x konvergerar följande potensserier?

a) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+1)3^{m+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n$

5. En humla flyger längs kurvan (given på parameterform) $x = 2t^2, y = t^3, t \geq 0$. Då t = 1 upptäcker humlan en blomma i punkten (5,3) och flyger istället iväg längs tangenten. Kommer humlan fram till blomman? (t= tiden).

6. Låt $\overline{F(t)} = (\ln t, 2\sqrt{t}, \frac{t}{2})$. Bestäm längden av $\overline{F(t)}$ mellan t = 1 och t = e.

7. Bestäm tangenterna till $\overline{F(t)}$ i uppgift 2 då t = 1 och t = e samt bestäm vinkeln mellan dessa.

8. Bestäm definitionsområde och värdemängd till funktionerna:
a) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)(y-2)}$
b) f(x,y) = tan(x – y)

9. Skissera definitionsmängd till följande funktioner:
a) $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ b) $(u,v) = (\sqrt{x+y}, \sqrt{1-x+y})$.

10. Ange inre punkter och randpunkter till mängderna i uppgift 9.

11. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

12. Bestäm $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ då a) f(x,y)= $x\sin y + ye^{xy}$ b) f(x,y)= $\sqrt{e^{x+2y} - y^2}$

13. Bestäm $b\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y}$ då z = f(ax+by) .

14. Visa att u(x,y) = $h(x^2y)$ satisfierar den partiella differentialekvationen
$x^2u_{xx} - xu_x - 4y^2u_{yy} = 0$

15. Bestäm ekvationen för a) tangentplanet b) normalen
till ytan $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ i punkten (1,2,-1).

16. Ytorna x + y + z = 3 och $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ skär varandra längs en rymdkurva. Bestäm
normalplanet och tangenten till kurvan i punkten (1,1,1)

17. Ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 1 = (2-4a)y^2 + az^2$ skär
varandra i punkten (1,-1,2). För vilka värden på a skär de varandra vinkelrätt?

Svar till inför KS3 , Matematik II för CL, SF1613 VT10

1 a) $6<n<10$, $21<n<25$

b) $S = \dfrac{x}{3x-1}$. S=2 då $x = \dfrac{2}{5}$, summan kan ej bli –3

c) $\dfrac{e^{N+1}}{e-1}$

d) 1

2. a) konv b) div c) konv

d) div e) div f) div

g) konv

3. a) konv b) konv c) konv

d) konv e) konv

4. a) $-3 \le x < 3$ b) konvergens för alla x c) x=a

d) $-1<x<3$ e) $-2 \le x < 2$ f) $-e<x<e$

5. nej

6. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{e}{2}$

7. Tangenten då t = 1 är (x,y,z) =(t, 2+t, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2}$) och tangenten då t = e är (x,y,z) = $(1 + \dfrac{1}{e}t, 2\sqrt{e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}}t, \dfrac{e}{2} + \dfrac{t}{2})$. Vinkeln mellan tangenterna är $\arccos(\dfrac{4+4\sqrt{e}+e}{3(2+e)})$.

8a) Definitionsmängd: $x \ge 1 ochy \ge 2 samtx \le 1 ochy \le 2$. Värdemängd: $f(x,y) \ge 0$

b) Definitionsmängd: $x - y \ne \pi/2 + n\pi$. Värdemängd: $f(x,y) \in R$

9. a) $\mathrm{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ b) $\mathrm{D} = \{(x,y) : -y \le x \le y+1\}$

10 . a) Inre punkter: $x^2 + y^2 < 1$, Randpunkter: $x^2 + y^2 = 1$

b) Inre punkter: $-y < x < y+1$, Randpunkter: y=-x för $x < \frac{1}{2}$, y=x-1 för $x \geq \frac{1}{2}$

11. a) –1 b) Existerar ej

12. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y + y^2 e^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y + e^{xy} + xye^{xy}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{x+2y}}{2\sqrt{e^{x+2y} - y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x+2y} - y}{\sqrt{e^{x+2y} - y^2}}$

13. 0

15. a) 6x -11y - 14z +2 = 0 b) (x,y,z) = (1,2,-1) +t(-6,11,14)

16. 3x-y-2z = 0 och (x,y,z) = (1,1,1) + t(3,-1,-2)

17. För alla a-värden