

Uppgifter inför KS4 den 19 april 2010. Matematik II för CL. SF1613.

1. En humla flyger längs kurvan (given på parameterform) $x = 2t^2, y = t^3, t \geq 0$. Då $t = 1$ upptäcker humlan en blomma i punkten (5,3) och flyger istället iväg längs tangenten. Kommer humlan fram till blomman? ($t =$ tiden).
2. Låt $\overline{F(t)} = (\ln t, 2\sqrt{t}, \frac{t}{2})$. Bestäm längden av $\overline{F(t)}$ mellan $t = 1$ och $t = e$.
3. Bestäm tangenterna till $\overline{F(t)}$ i uppgift 2 då $t = 1$ och $t = e$ samt bestäm vinkeln mellan dessa.
4. Bestäm ekvationen för a) tangentplanet b) normalen till ytan $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ i punkten (1,2,-1).
5. Ytorna $x + y + z = 3$ och $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ skär varandra längs en rymdkurva. Bestäm normalplanet och tangenten till kurvan i punkten (1,1,1)
6. Ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ skär varandra i punkten (1,-1,2). För vilka värden på a skär de varandra vinkelrätt?
7. Bestäm riktningsderivatan för $f(x,y,z) = (y^2 + \sin z)e^{-x}$ i punkten (0,2, π) i riktning mot punkten (1,1,0).
8. Bestäm riktningsderivatan till $F = x^2yz^2$ längs kurvan $x = e^{-u}, y = 2\sin u + 1, z = u - \cos u$ i punkten P då $u = 0$.
9. Temperaturen i en punkt på xy -planet är $T = \frac{100xy}{x^2 + y^2}$.
 - a) Bestäm riktningsderivatan i punkten (2,1) i den riktning som bildar 60 graders vinkel med positiva x -axeln.
 - b) I vilken riktning tagen från (2,1) är derivatan maximal?
 - c) Vilket är max.värdet?
10. En bit metall upptar området $0 < x < 1, 0 < y < 1$ i xy -planet. Metallens temperatur är känd som $T = xy(1-x)(1-y)$. I vilken riktning skall en insekt som befinner sig i punkten $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ flyga för att svalna så snabbt som möjligt.

11. En bergsklättrare befinner sig i punkten (1,1,2) på berget $z = 4 - x^2 - y^2$ och bestämmer sig för att gå i nordostlig riktning. Går hon uppför eller nedför berget?

12. Bestäm genom att införa variablerna
$$\begin{cases} u = (x + y)e^{-z} \\ v = (x - y)e^z \\ w = z \end{cases}$$
 den allmänna lösningen till differentialekvationen $yf'_x + xf'_y + f'_z = 0$.

13. Transformera $\frac{\partial z}{\partial x}$ då $z = z(x, y)$ och $x = u + v$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

14. Transformera $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ då a) $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x = v + \ln u \\ 2y = -v + \ln u \end{cases}$.

15. Transformera följande uttryck med angivet variabelbyte:

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ då $\begin{cases} u = ax - by \\ v = bx + ay \end{cases}$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ då $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ då $\begin{cases} x = u + e^v \\ y = e^u \end{cases}$.

16. Bestäm MacLaurinpolynommet av andra graden till funktionen

a) $\ln(1 + x + y^2)$ b) $e^{xy} \cos(x + y)$ c) $\frac{e^{x+y}}{\cos(x - y)}$

17. Taylorutveckla $f(x, y) = \ln(2x^2 + y^2) - 2y + 2$ omkring punkten (0,1) till andra graden.

18. MacLaurinutveckla $f(x, y) = \sin(x^2 + y) + e^{xy}$ till tredje gradstermerna.

19. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 med ordrestterm av funktionerna

a) $xy - x^2 + xy^3$ b) $\ln(x + \cos y)$

20. Beräkna gränsvärdet a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{x^2 + y^2}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{1 - \cos x \cos y}$.

21. Vilka av följande kvadratiska former $\rho(h,k,l)$ är definita, indefinita eller semidefinita?

a) $(h+k)^2$ b) $h^2 + k^2 + kl$ c) $h^2 + k^2 + l^2 + 2hk$ d) $2h^2 + k^2 + l^2 + 2hk + hl$

22. Bestäm lokala extremvärden till följande funktioner då $f(x,y)$ är given av

a) $x^3 + y^2 - 6xy$ b) $x^3 - y^3 - 3xy$ c) $x^3 + y^2 - xy - y$

23. Avgör om följande funktioner är linjära. Ange i sådana fall funktionens matris.

a) $f(x,y) = (x+y, 2x+y, y)^T$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

24. Bestäm Jacobimatrisen till : a) $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \end{array} \right\}$

b) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 + yz, y^2 - x \ln z)$

25. Visa att funktionen $f: \begin{cases} u = x + e^y \\ v = y - e^x \end{cases}$ är lokalt inverterbar och beräkna

de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ svarande mot punkten $(x,y)=(0,0)$. Beräkna även inversens Jacobimatrix svarnade mot denna punkt.

26. En yta definieras genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning av punkten $(1,3,2)$ där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Bestäm z'_x och z'_y i punkten $(1,3)$.

27. Beräkna z''_{xy} för den funktion $z=z(x,y)$ som i någon omgivning av punkten $(1,1,1)$ definieras medelst ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z = 6$.

28. Visa att ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 0 \\ x + y^3 + z^2 = 0 \end{cases}$$
 definierar i en omgivning av punkten $(-2,1,1)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y=y(x)$ och $z=z(x)$. Beräkna $y'(-2)$.

29. Kan summan av tre positiva tal vara 5 om deras produkt är 8?

30. Bestäm största och minsta värdet av funktionen f given av $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ i den slutna triangeln med hörnen i punkterna $(2,-2)$, $(2,3)$ och $(-3,-2)$.

31. Samma uppgift som i 23 men med f given av $f(x, y) = xy + 3x - 5y$ i mängden $x^2 \leq y \leq 2 - x$.

18. $f(x,y) = 1 + y + x^2 + xy - \frac{y^3}{6} + R_3$

19a) $xy - x^2 + O(r^4)$ b) $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + O(r^4)$

20a) 1 b) 2

21. a) Positivt semidefinit b) Indefinit c) Positivt semidefinit

d) Positivt definit ty:

21 a) $\rho(h,k,l) \geq 0$ för alla h,k,l och =0 om h=-k

b) $\rho(h,k,l) = h^2 + (k + \frac{l}{2})^2 - \frac{l^2}{4}$ antar både positiva och negativa värden:

$\rho(h,0,0) > 0$, om $h \neq 0$, $\rho(0,k,-2k) < 0$ om $k \neq 0$.

c) $\rho(h,k,l) = (h+k)^2 + l^2$ d) $\rho(h,k,l) = (h+k)^2 + (h + \frac{1}{2}l)^2 + \frac{3}{4}l^2$

22. a) Min = -108 i (6,18) b) Min = -1 i (1,1) c) Min = $-\frac{7}{16}i(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

23a) linjär $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) ej linjär

24. a) $J = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{pmatrix}$

25. $x_u' = y_u' = y_v' = \frac{1}{2}$, $x_v' = -\frac{1}{2}$, $J_{f^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $z_x' = 6, z_y' = 2.$

27. -3/2

28. -1/5

29. nej

30. -1; 24 .

31. -34; 13/27