

Uppgifter inför KS 5 den 17 maj 2010. Matematik II för CL.

Beräkna följande dubbelintegraler:

1. a) $\iint_D (x+y) dx dy$, över kvadraten $2 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$.

b) $\iint_D (\sin y + y \cos x) dx dy$ då D ges av $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

c) $\iint_D xy \cos(x^2 + y^2) dx dy$ över $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$, $0 \leq y \leq \sqrt{\pi}$.

2. a) $\iint_D (xy + y^2) dx dy$, då D ges av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$.

b) $\iint_D dx dy$, D definieras genom $2 \leq x + y \leq 6$, $x^2 \leq y$ och $x \geq 0$.

c) $\iint_D \sqrt{xy} dx dy$, över fyrhörningen med hörnen i punkterna (1,1), (2,2), (1,2) och (2,4).

d) $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 dx$.

e) $\iint_D y \sqrt{x} dx dy$, D ges av $x \geq 0$, $y \geq x^2$ och $y \leq 2 - x^2$.

3. a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ då D ges av $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

b) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ då D ges av $x^2 + y^2 \leq y$, $x \geq 0$.

c) $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ då D ges av $1 \leq 9x^2 + 4y^2 \leq 4$.

4. a) $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$ över kvadraten med hörn $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ och $(0, \pi)$.

b) $\iint_D \frac{x+y}{x^2 + y^2} e^{x-y} dx dy$, D ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $0 \leq x - y \leq 1$.

c) $\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2} dx dy$ över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

Beräkna följande integraler:

5a) $\iiint_K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) dx dy dz$ där K är kuben $1 \leq x \leq a$, $1 \leq y \leq a$ och $1 \leq z \leq a$.

b) $\iiint_K xyz dx dy dz$, K ges av $0 \leq y \leq 1-x$, $0 \leq z \leq 1-x-y$ och $0 \leq x \leq 1$.

c) $\iiint_K \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, K begränsas av koordinatplanen och $x+y+z=1$.

d) $\iiint_K (1+x^2+y^2+z^2)^{-1} dx dy dz$, över klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

e) $\iiint_K (x^2+y^2-z^2) dx dy dz$, över klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

6. Beräkna arean av det område som begränsas av följande kurvor:

a) $(x-y)^2 + x^2 = a^2$

b) $xy=4$, $xy=8$, $y=x$ och $y=2x$ ($x>1$)

c) $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $x^2 = 2y$ och $x^2 = 4y$.

7. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av

a) planen $x-2y+z=1$, $2x-y+z=0$, $x=0$ och $y=0$.

b) cylindern $x^2+y^2=4$, paraboloiden $z=x^2+y^2$ och planet $z=0$.

c) cylindern $y=z^2$ samt planen $x=0$, $x=1$ och $y=1$.

8. Beräkna följande generaliserade multipelintegraler:

a) $\iint_D \frac{1}{x} dx dy$, D ges av $x \geq 1$, $0 \leq xy \leq 1$.

b) $\iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} dx dy$, D ges av $x > 0$, $xy \geq 1$.

9. a) Beräkna linjeintegralen $\int_{\Gamma} yx dx + x^2 dy$ från (0,0) till (1,1) längs parabeln $y = x^2$

b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} y dx - x dy$ längs $x^2 + y^2 = 1$ från (1,0) till (0,1)

c) Beräkna $\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{(x+y)^2}$ längs $x + 2y = 1 + y^2$ från (1,0) till (0,1) .

d) Beräkna $\int_{\Gamma} (x^4 - y^2) dx + (x^4 + y^2) dy$ längs parabeln $y = x^2$ från (-1,1) till (1,1) och linjen $y=1$ från (1,1) till (-1,1).

e) Beräkna $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ i positiv led runt kvadraten med hörnen $(\pm 1, \pm 1)$.

f) Beräkna $\int_{\Gamma} \frac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}$ i positiv led från längs $x^2 + y^2 = 1$ från (1,0) till (0,1) .

g) Beräkna $\int_{\Gamma} (e^x \cos x - y) dx + (2xy + \arctan y^2) dy$ tagen i positiv led längs randen till området $x^2 - 3 \leq y \leq \frac{x^2}{4}$.

h) Beräkna $\int_{\Gamma} (\cos x \ln(x+y) + \frac{\sin x}{x+y}) dx + (\frac{2}{4+y^2} + \frac{\sin x}{x+y}) dy$ längs kurvan $\begin{cases} x = 2 - 2t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ från (2,0) till (0,2) dvs för $0 \leq t \leq 1$.

i) Beräkna $\int_{\Gamma} (y - \frac{\pi}{2} \sin y) dx + x dy$ där Γ löper från (0,0) till $(1, \frac{\pi}{2})$ längs kurvan $y = \arcsin x$.

Svar:

1. a) 3 b) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}$ c) -1

2. a) $\frac{5}{24}$ b) $\frac{37}{6}$ c) $\frac{14}{9}(\sqrt{8}-1)$ d) $\frac{1}{10}\sin 32$ e) $\frac{16}{21}$

3. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{39\pi}{8}$

4. a) $\frac{\pi^4}{3}$ b) $(e-1)\ln 2$ c) $\pi(1-\ln 2)$

5. a) $3(a-1)^2 \ln a$ b) $\frac{1}{720}$ c) $\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$

d) $4\pi(1 - \frac{\pi}{4})$

6. a) πa^2 b) $2\ln 2$ c) $4/3$

7. a) $1/6$ b) 8π c) $4/3$

8. a) 1 b) $\frac{\pi^2}{8}$

9. a) $3/4$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) 1 d) $\frac{8}{5}$

e) 0 f) -2 g) -8

h) $\frac{\pi}{4} - \ln 2 \sin 2$ i) $\frac{\pi}{4}$.