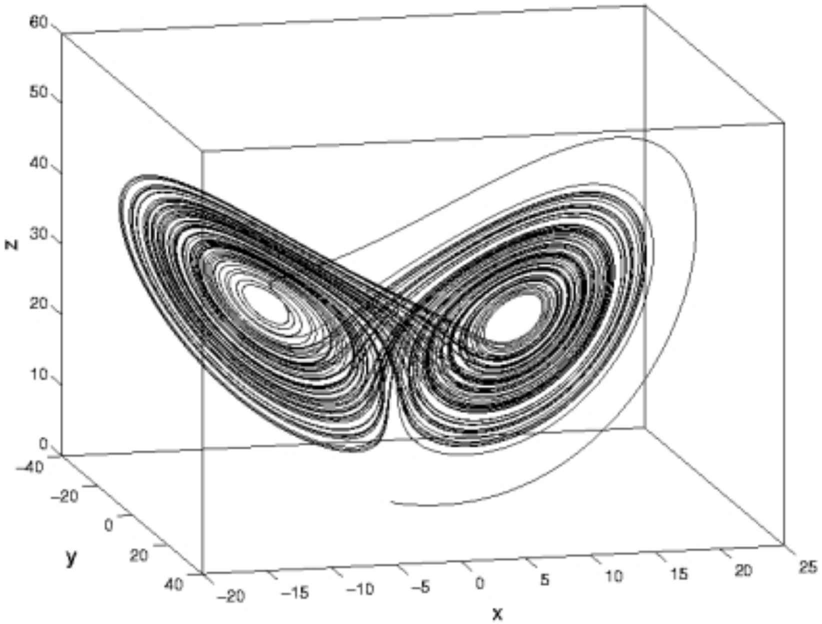
Sällsamma attraktorer
(Strange Attrators)
till dynamiska system i diskret och kontinuerlig tid

Hans Thunberg, KTH Matematik
CL1 22 feb 2010

Lorenz-attraktorn

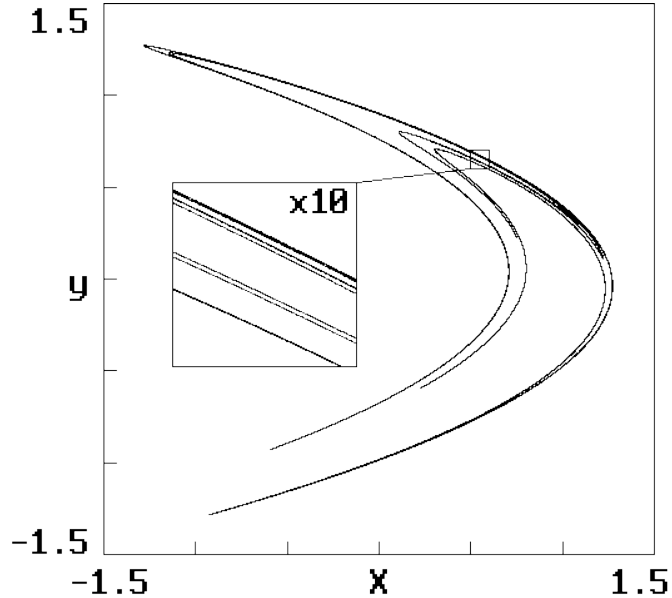


$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$\rho=28$, $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$

http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Hénon-attraktorn



$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2,$$
$$y_{n+1} = bx_n.$$

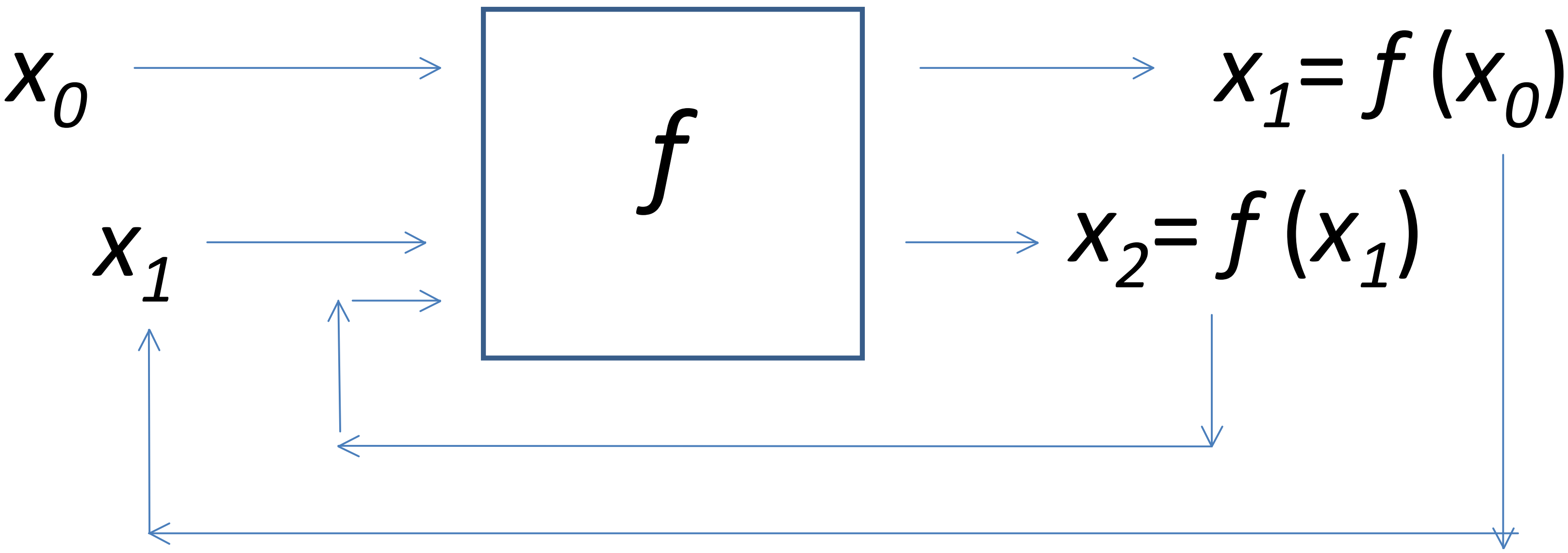
http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/henon.gif

Kvadratiska familjen

0 1

$X_{n+1} = k\, x_n\, (1-x_n)$

Iterationer – Diskreta dynamiska system



$$x_0 \longrightarrow x_1 = f(x_0) \longrightarrow x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \longrightarrow x_3 \quad \ldots\ldots$$

Vad händer i det långa loppet?

Användningsområden, exempel

- Newton-Raphsons metod (ekvationslösning)

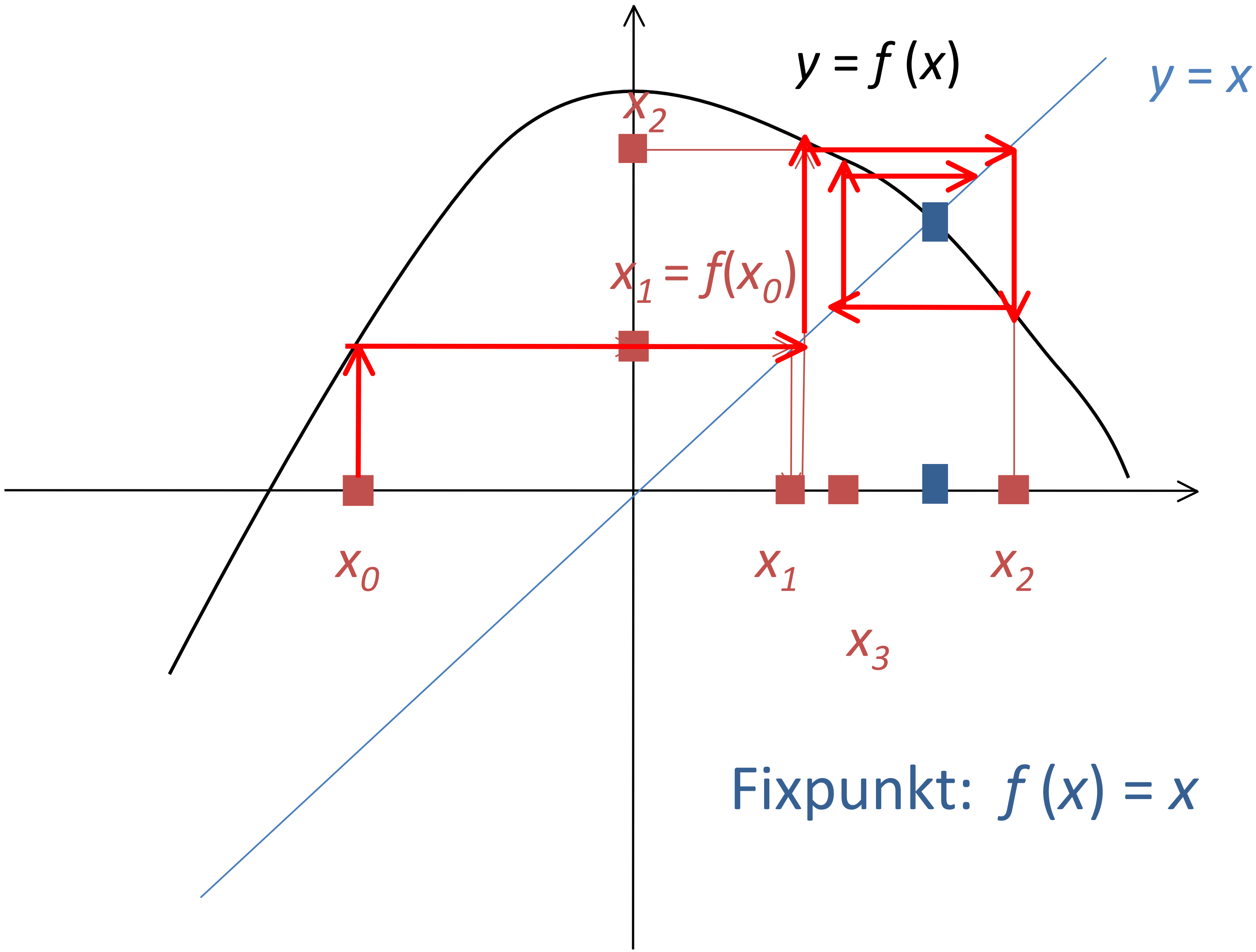
- Modellering av dynamiska förlopp:

Populationsmodeller, väderprognoser …

  - x_0 är initialt tillstånd (t ex populationsstorlek)
  - f beskriver tidsutveckling
  - $x_1 = f(x_0)$ prognos för tillstånd en tidsenhet senare

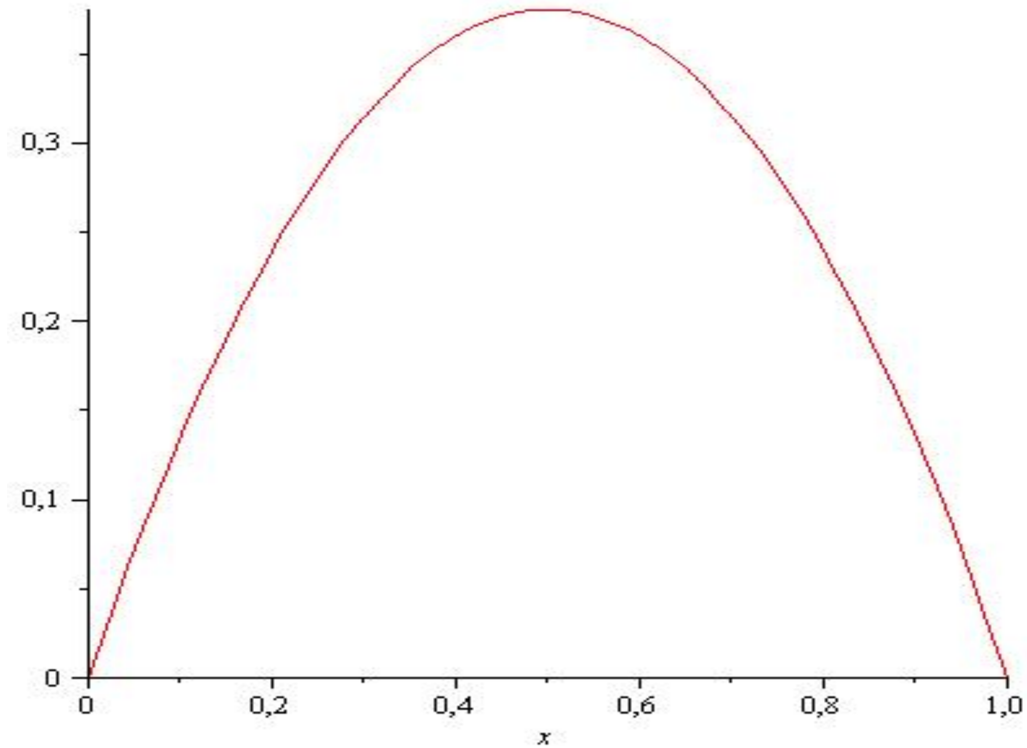
    |
  - $x_n = f(x_{n-1})$ prognos för tillstånd vid tid n

Grafisk iteration



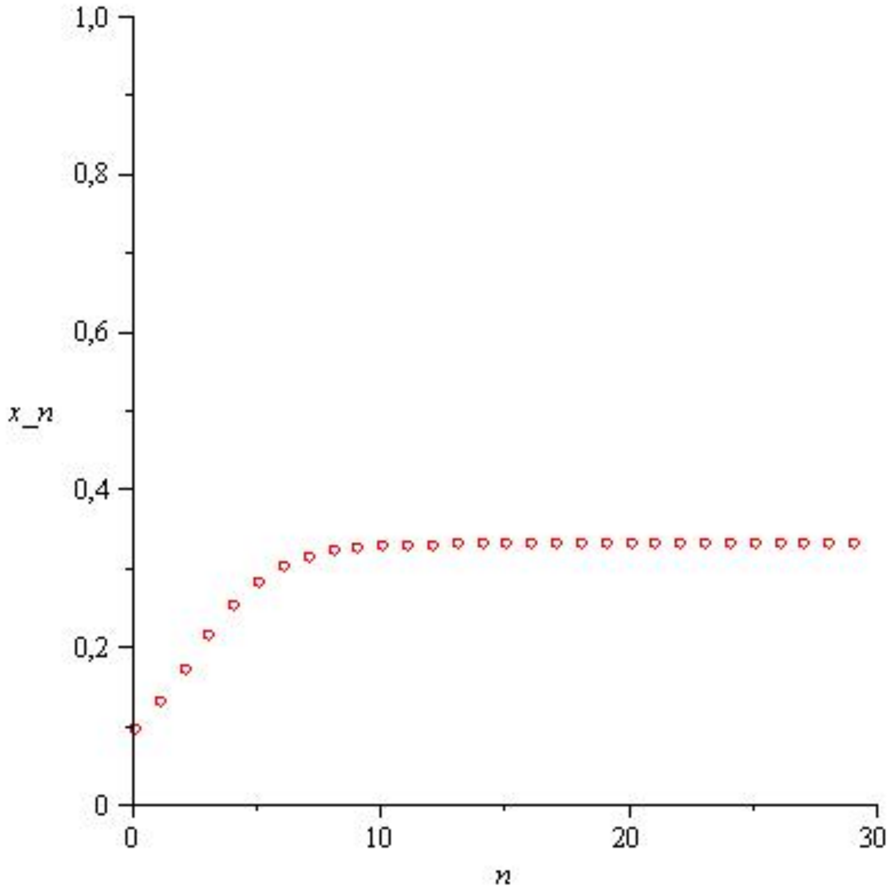
Exempel: Kvadratiska funktioner

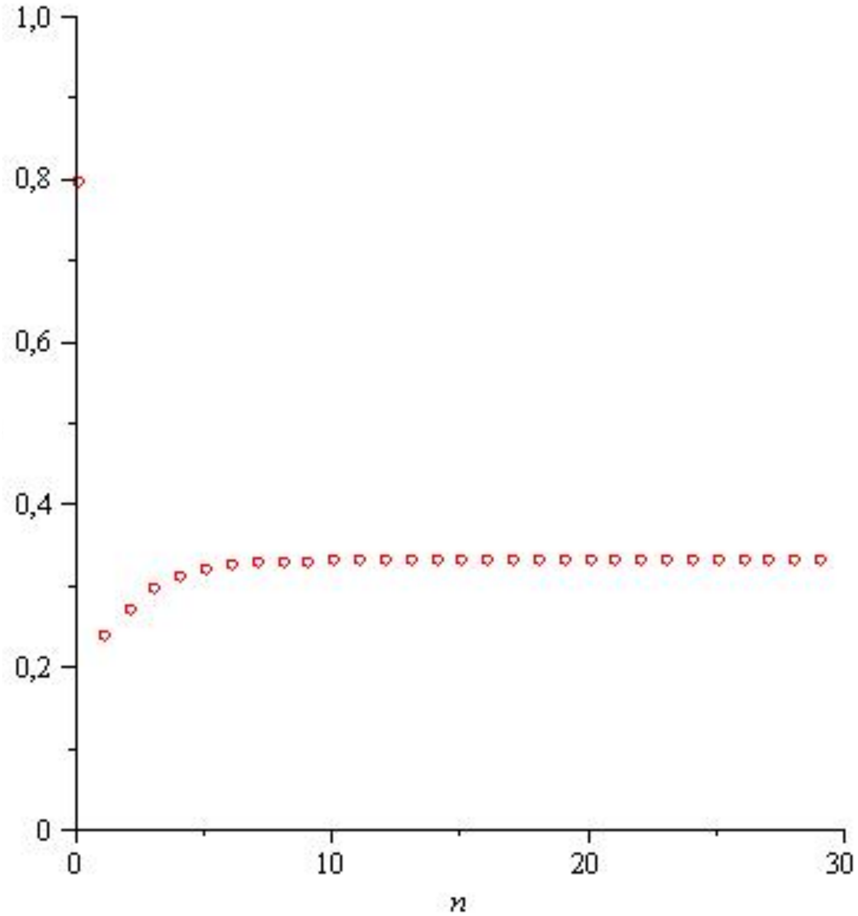
$f(x) = 1.5\,x\,(1-x)$



$f(x) = 1.5\,x\,(1\text{-}x)$

Startvärde $x_0 = 0.1$ resp $x_0 = 0.8$





$$f\,(x) = 1.5\,x\,(1\text{-}x)$$

x = 1/3 är en **fixpunkt**

$$f(1/3) = 1/3$$

och den är **en attraktor**

(den är **attraherande** eller **stabil**)

$$x_n \longrightarrow 1/3 \text{ när } n \longrightarrow \infty$$

för alla startvärden x_0 nära 1/3

När är en fixpunkt attraktiv?

- $t(x) = 1 + k\,x$ har fixpunkt $x = 1/(1-k)$

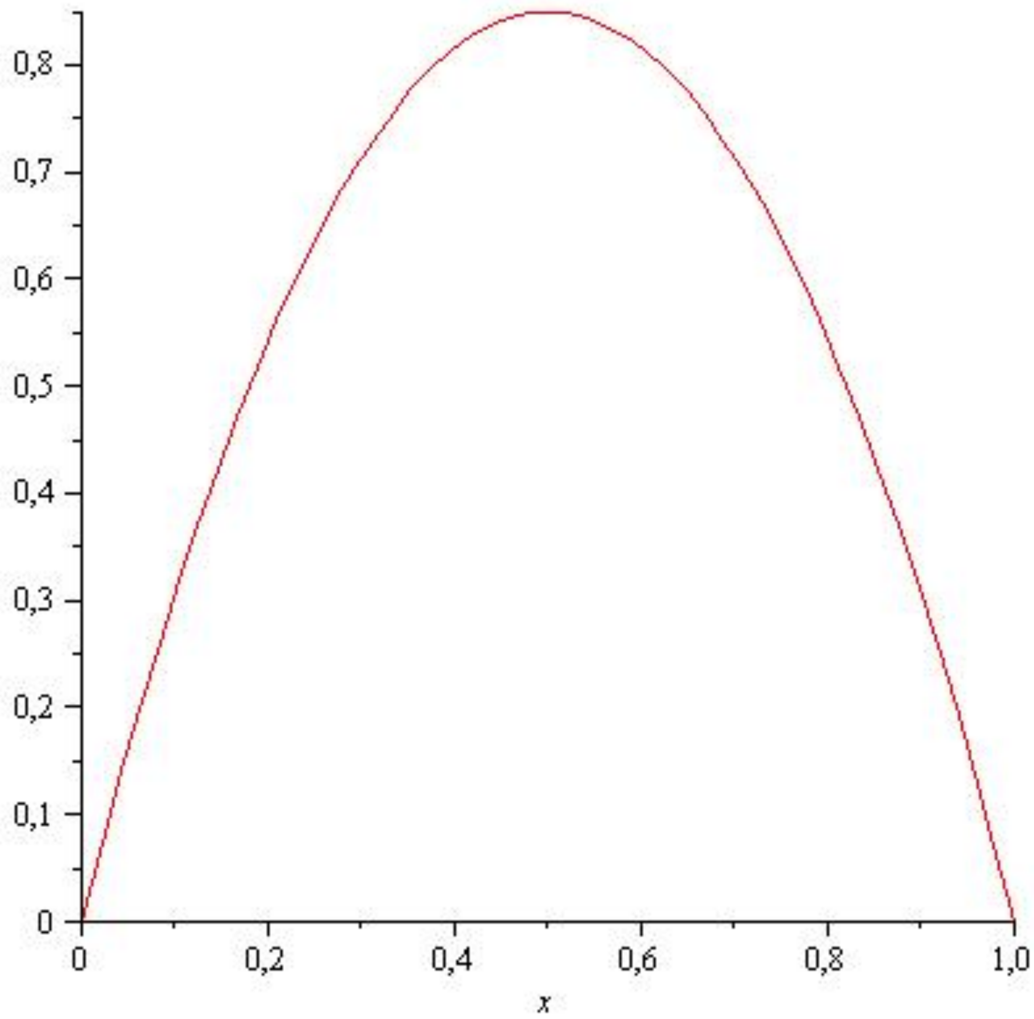
(lösning till ekvationen $t(x) = x$)

Vi undersöker attraktivitet med grafisk iteration

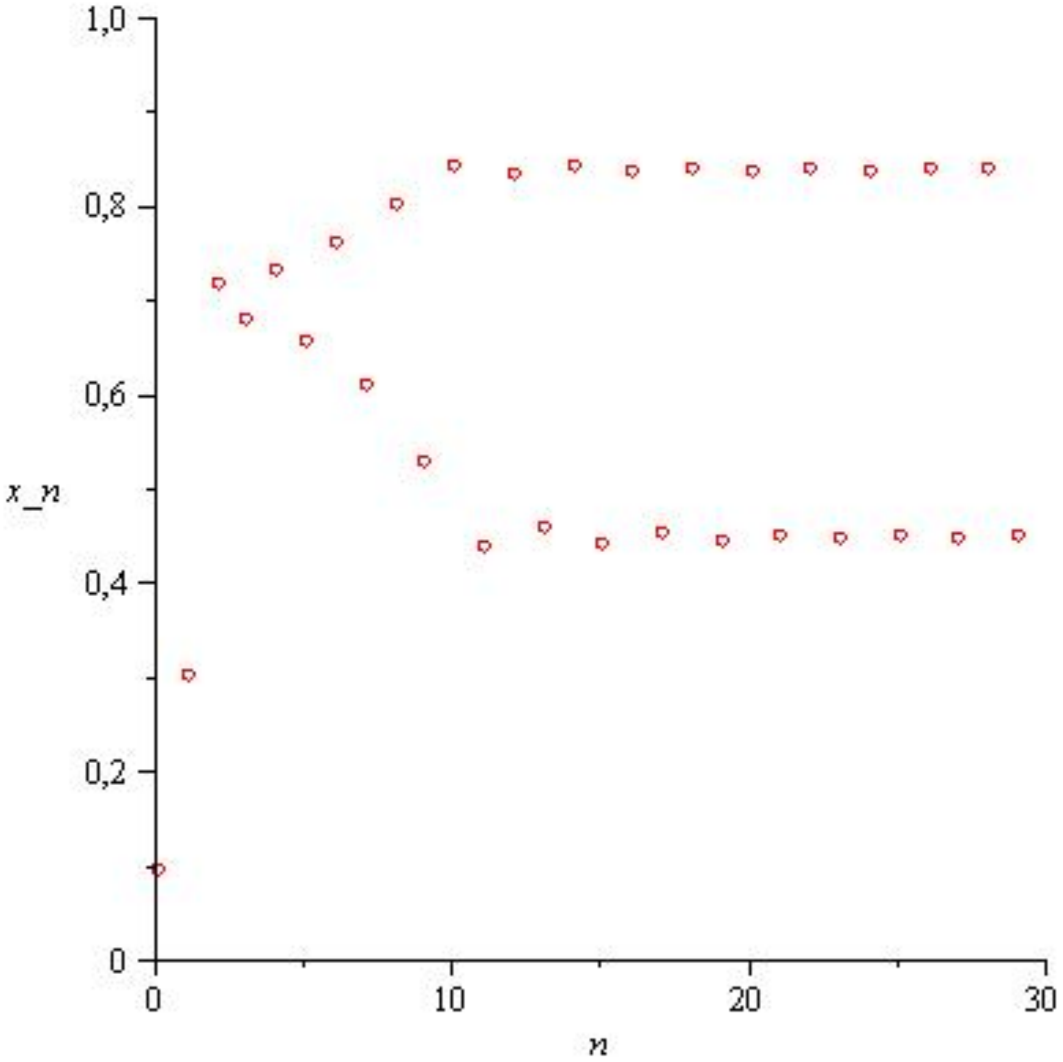
  – Attraktiv om $|\,k\,| < 1$. Bevis: ....

- Allmänna fallet: Om $f(x)$ har fixpunkt p , är denna attraktiv om ....?
  – Attraktiv om $|\,f'(p)\,| < 1$
  (Bevisas t ex med hjälp av Medelvärdesatsen)

$$f(x) = 3.4\, x\, (1-x)$$



$f\,(x) = 3.4\,x\,(1\text{-x}),\ x_0 = 0.1$



$$f(x) = 3.4\, x\,(1-x)$$

har en **periodisk bana av längd 2 (2-cykel)**

$p \approx 0.45$ och $q \approx 0.84$

$f(p) = q$ och $f(q) = p$

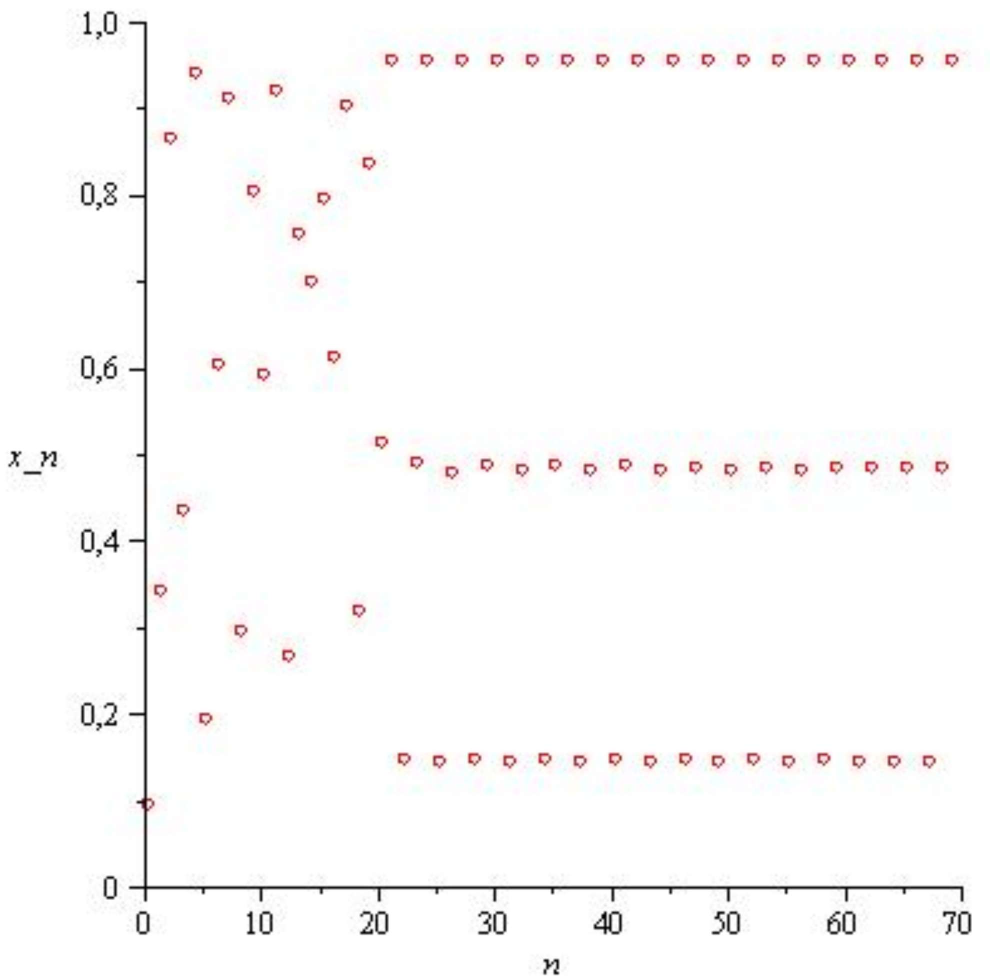
dvs $f(f(p))=p$ och $f(f(q))=q$

som är **attraktiv (stabil)**

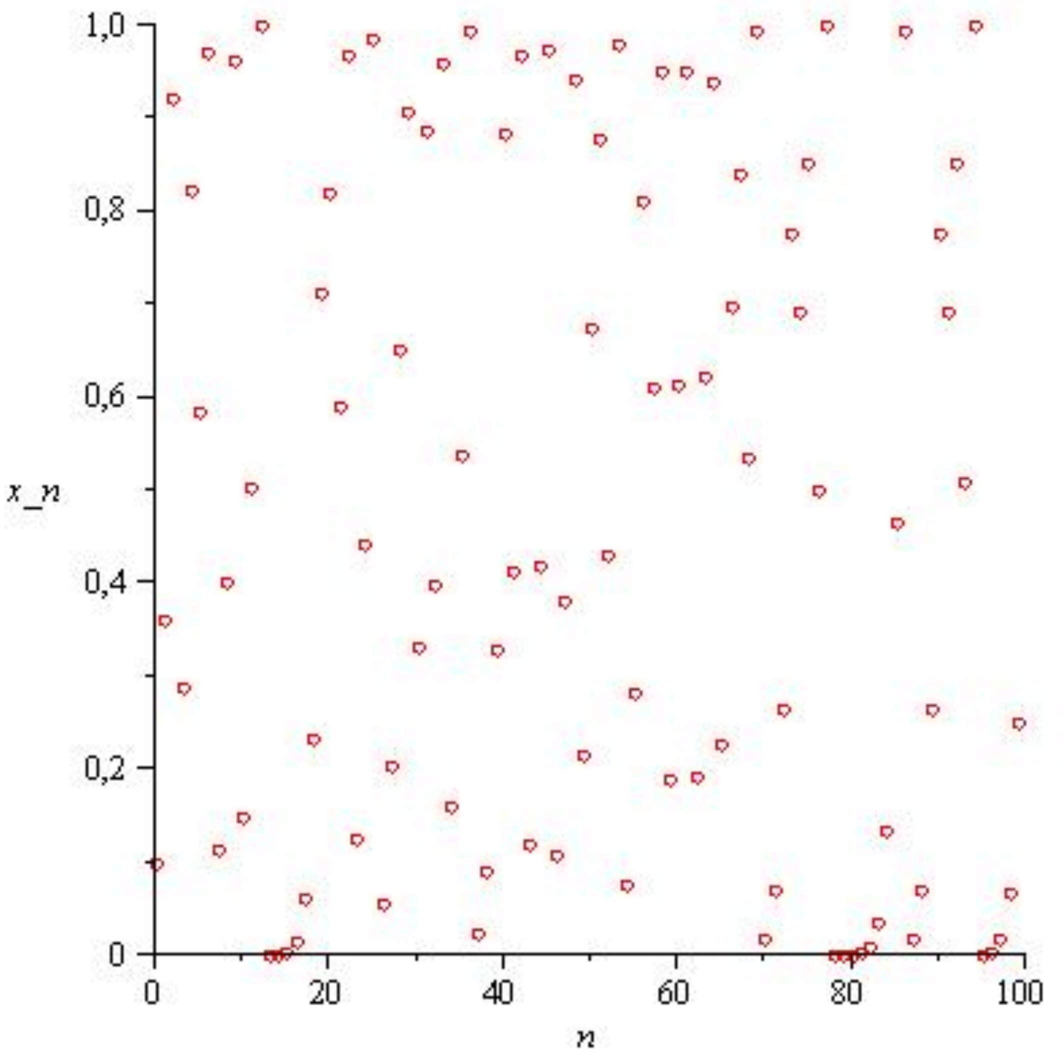
närliggande startvärden x_0 närmar sig detta periodiskt förlopp

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots \longrightarrow \approx 0.45 \longrightarrow \approx 0.84 \longrightarrow \approx 0.45 \longrightarrow$$

$f(x)$ = 3.84 x (1-x) har en stabil periodisk bana av längd 3 (3-cykel)



$f\,(x) = 4\;x\;(1\text{-}x)$ uppvisar **kaotisk dynamik** på ett **attraherande interval**



- Inga attraherande periodiska banor
- Typiska banor fyller ut hela intervallet (0,1)
- Små skillnader i startvärden växer exponentiellt med antal iterationer

Attraktorer

A sägs vara en **attraktor** till en avbildning $f : I \to I$ om

- $f(A) = A$
- $\exists$ omgivning *B* till *A* sådan att

  $f^n(x) \to A$, $n \to \infty$, för alla *x* i *B*
- Ingen äkta delmängd till *A* har dessa egenskaper.

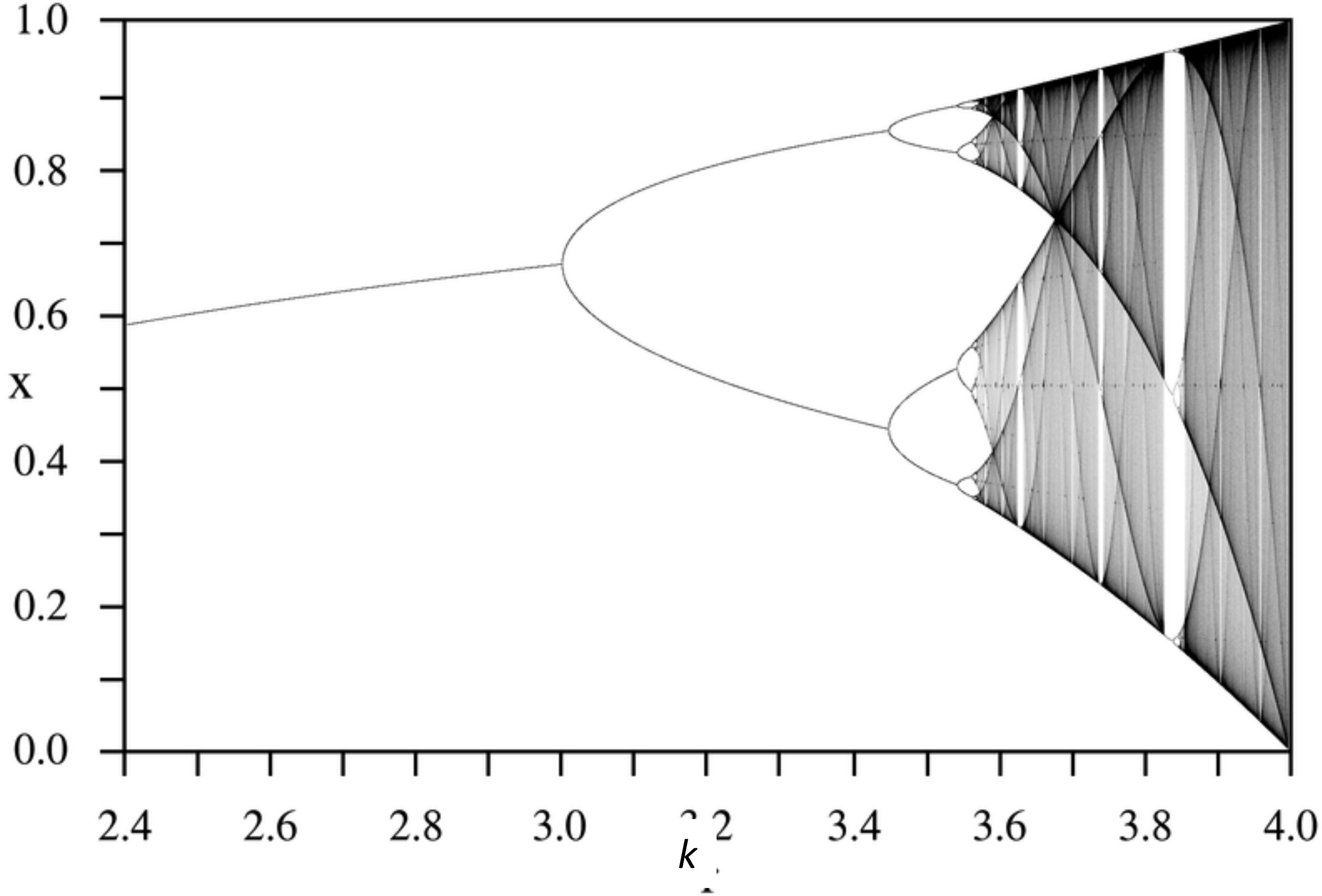
A är en **sällsam** attraktor om *A* dessutom

- är ”topologiskt/geometriskt komplicerad”
- stöder kaotisk dynamik,

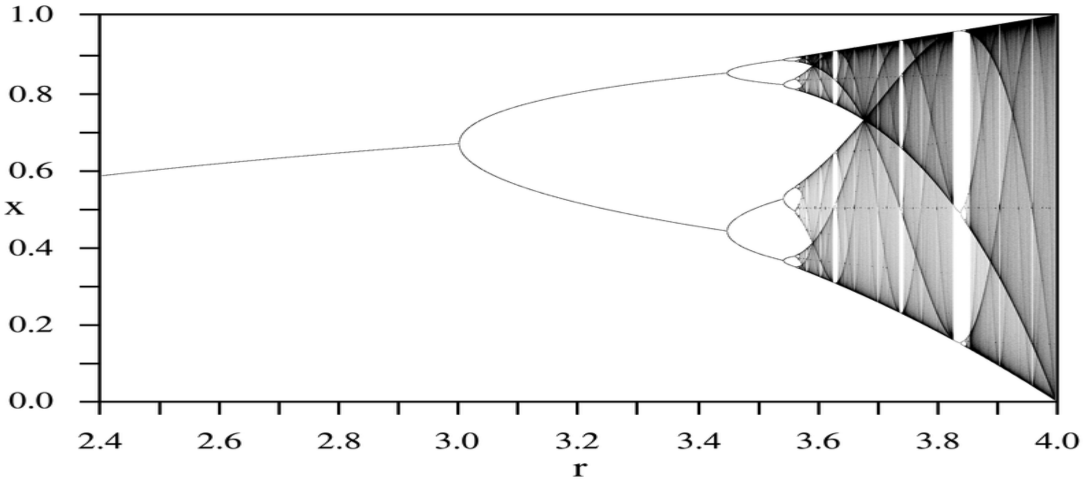
  t ex $|x_n - y_n| \sim e^n |x_0 - y_0|$

  eller $\exists\ \delta > 0$ s a $\forall\ x_0, y_0\ \exists\ N$ s a $|x_N - y_N| > \delta$

Bifurkationsdiagram för $f\,(x) = k\,x\,(1\text{-}x)$



Eng Wikipedia



Parametervärden *k* som ger stabila periodiska banor består av oändlig många öppna interval

Sats: (Lyubich, Swiatek) Varje öppet intervall på *k*-axeln, $1 \leq k \leq 4$, innehåller *k* värden som ger attraherande periodiska banor (man säger att de utgör en *tät* delmängd)

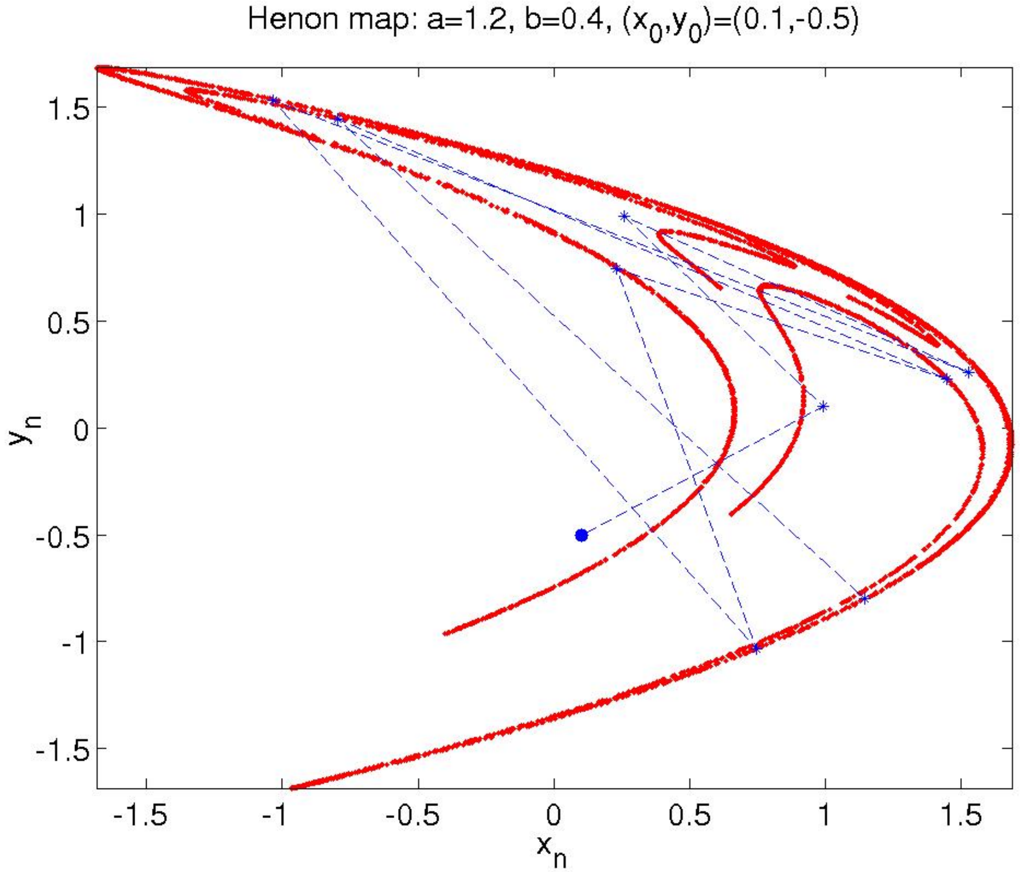
Sats: (Benedicks, Carleson) Om parametervärdet *k* väljs slumpvis med likformig sannolikhet i intervallet $1 \leq k \leq 4$ har $f(x) = k\,x\,(1-x)$ en kaotisk intervallattraktor med positiv sannolikhet.

Mängden av dessa kaotiska *k*-värden innehåller inga interval, de utgör en s k Cantor mängd

Hénonavbildningen

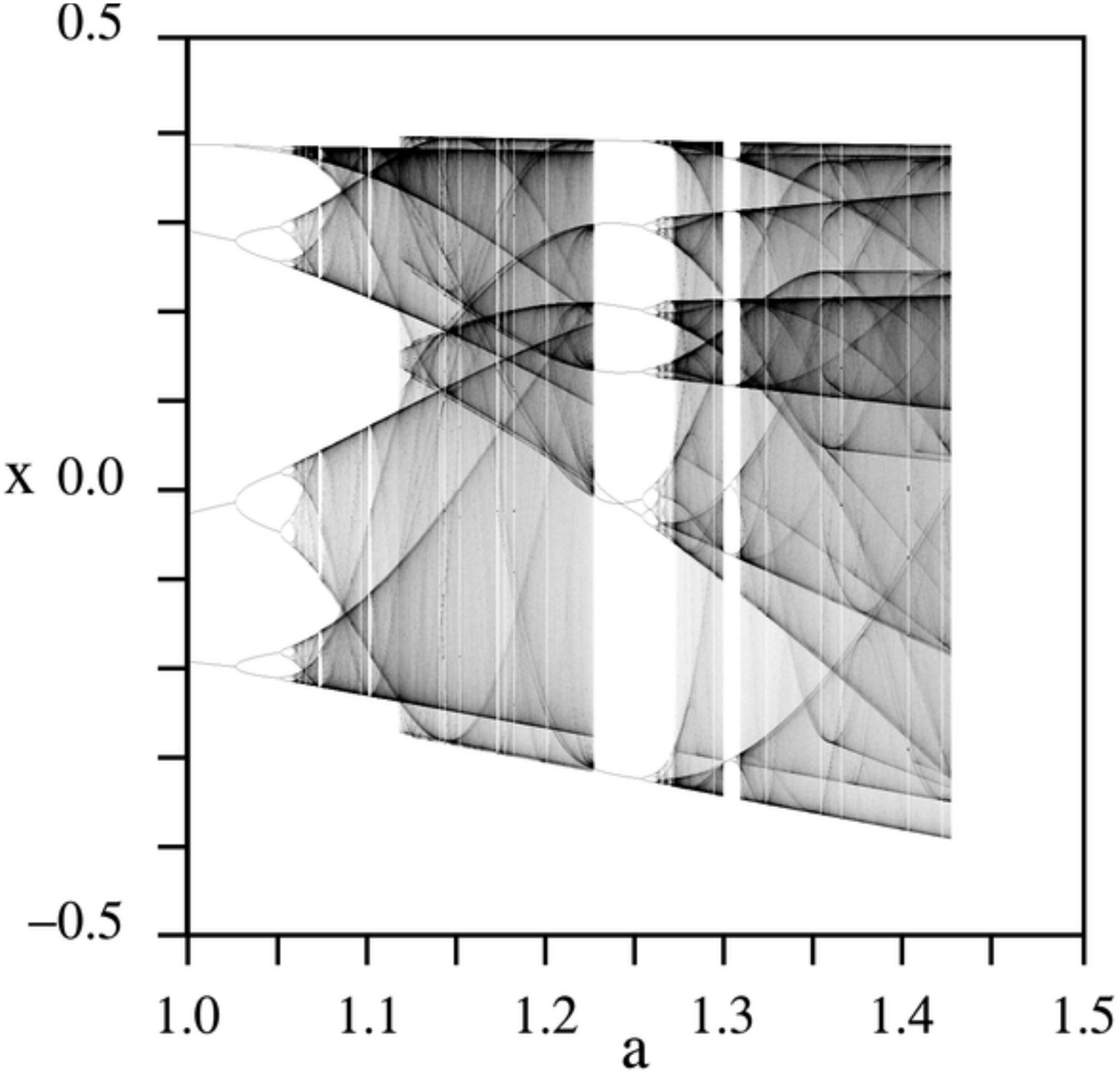
$$H_{a,b}: \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned}$$

a = 1.4 , *b* = 0.3



Eng Wikipedia

http://www-rohan.sdsu.edu/~rcarrete/teaching/M-538/lectures/codes/2D_map/pics/henon.jpg



b = 0.3

Eng Wikipedia

Exempel på Hénondynamik

http://brain.cc.kogakuin.ac.jp/~kanamaru/Chaos/e/Henon/

a = 1.25, 1.26, 1.27 … 1.3, 1.307, 1.4

b = 0.3

Hénonavbildningen

$$H_{a,b}: \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - a x_n^2, \\ y_{n+1} &= b x_n. \end{aligned}$$

<u>SATS:</u> (Benedicks, Carleson) För alla tilltäckligt små värden på $b > 0$ finns det en mängd

$E = E(b)$ av a-värden med positiv sannolikhet sådan att för alla a i E gäller att $H_{a,b}$ har en sällsam attraktor A.

Autonoma system av 1:a ordningens ODE (flöden) – Dynamiska system i kontinuerlig tid

$$
\begin{cases}
dx/dt = f(x,y,z) \\
dy/dt = g(x,y,z) \\
dz/dt = h(x,y,z)
\end{cases}
$$

Lösningskurvor :

$$\Phi(t,\overline{w}_0) = (x(t,\overline{w}_0), y(t,\overline{w}_0), z(t,\overline{w}_0))$$

genom initialvärde $\overline{w}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Attraktorer

En kompakt A delmängd är en **attraktor** till $\Phi(t,w)$

- $\Phi(t, A) = A$ för alla t >0 .
- $\exists$ omgivning B till A sådan att

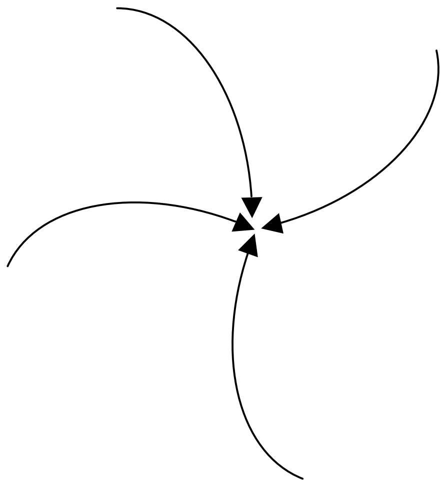
$\Phi(t,w) \to$ A , $t \to \infty$, för alla w i B

- Ingen äkta delmängd till A har dessa egenskaper.

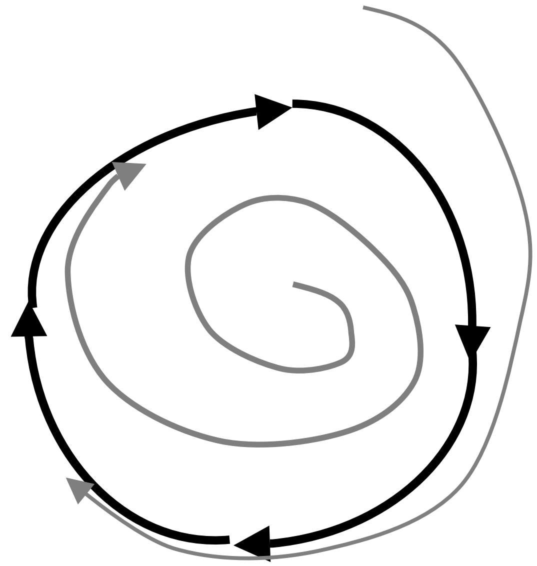
A är en **sällsam** attraktor om A dessutom

- är ”topologiskt/geometriskt komplicerad”
- stöder kaotisk dynamik,

Attraktorer till flöden



Stationära punkter



Gränscykler

Lorenz-systemet

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

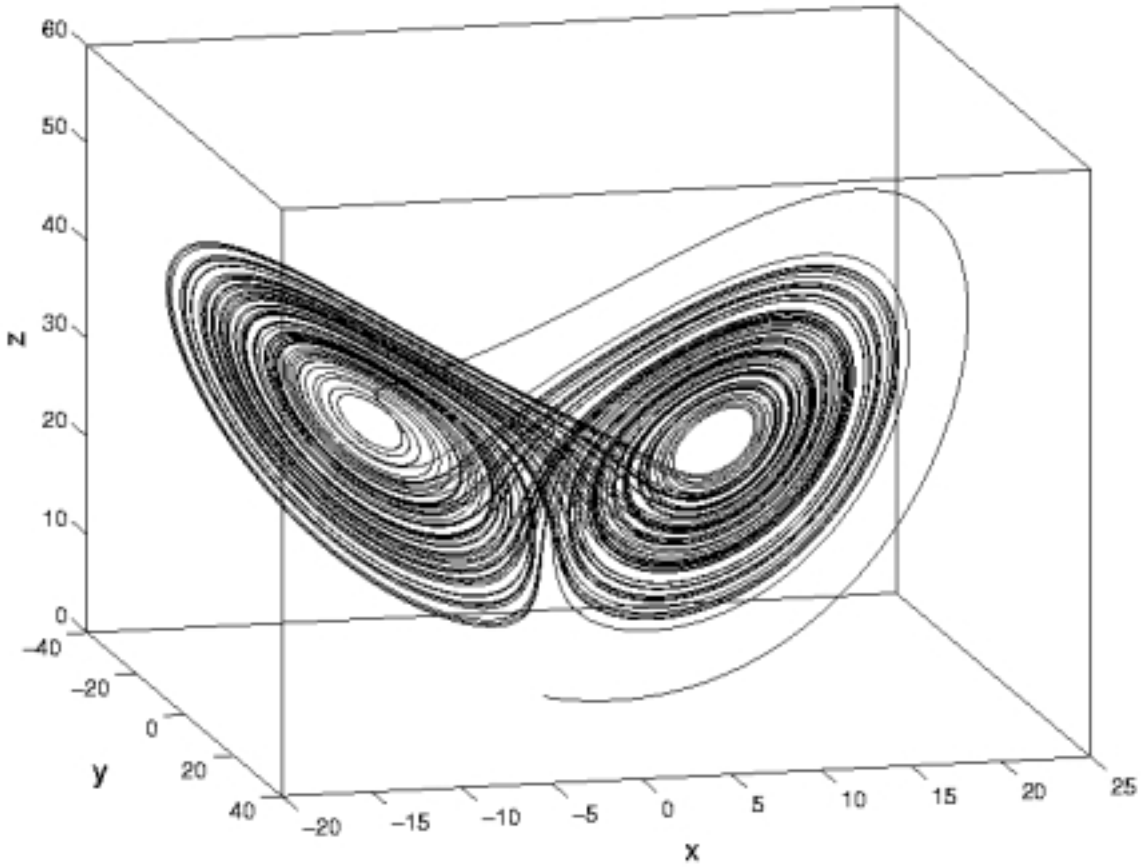
ρ=28, σ = 10, β = 8/3

Edward Lorenz (1963):

- Förenklad modell för atmosfärsdynamik

- Numeriska studier pekar på **ickeperidoiska attraktor**. Lösningar tycks ha **känsligt bereonde på intialvärde.**

Lorenzattraktorn



http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Animering av Lorenzattraktorn

http://www.sat.t.u-tokyo.ac.jp/~hideyuki/java/Attract.html

Lorenzattraktorn **är** sällsam

<u>SATS:</u> (Tucker 1998) För en öppen mängd av parametervärden, innehållande de klassiska värdena ρ=28, $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, har Lorenz systemet en sällsam attraktor *A,* dvs

(i) *A* är invariant

(ii) *A* attraherar alla lösningar med intialvärden i en öppen omgivning till *A*

(iii) *A* har fraktal struktur

(iv) Dynamiken är kaotisk

(v) Lösningskurvors långtidsfördelning beskrivs av ett gemensamt sannolikhetesmått