SF1624 för T och E, ht09 - sammanfatting

- Projektioner och koordinater
  - Givet vektor v och linje L, skriv $v = v_L + v_N$ (komposantuppdelning) där v_L är parallell med L och v_N är vinkelrät mot L.
  - v_L kallas den *ortogonala projektionen av v på L.*
  - Om $W \subset V$ är ett underrum med ON-basen $w_1, \ldots, w_n$ ges $P_W : V \to W$ av $P_W(v) =< w_1, v > w_1+ < w_2, v > w_, + \ldots < w_n, v > w_n$.
- Skalärprodukt
  - Om u är vektor, e en enhetsvektor som är parallell med linjen L, så är $u_L = (u \cdot e)e$, och $|u_L| = u \cdot e$.
  - Längd av vektor: $|v|^2 = v \cdot v$.
  - $u \cdot v = |u||v|\cos(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u, v.
  - $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$ och v vinkelräta *eller* någon av u, v lika med nollvektorn.
  - Säger att u, v *ortogonala* om $u \cdot v = 0$.
  - Vektorna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sägs vara *ortonormala* om $v_i \cdot v_j = 0$ om $i \neq j$, och $v_i \cdot v_i = 1$. OBS: ortonormala vektorer är automatiskt linjärt oberoende.
  - ON-bas: bas av ortonormala vektorer. Hittas mha Gram-Schmidt.
- Vektor/kryss-produkt
  - $|u \times v| = |u||v|\sin(\alpha)$ där α är vinkeln mellan u och v.
  - $u \times v$ vinkelrät mot både u och v.
  - Orientering: $(u, v, u \times v)$ *högerorienterad.*
- Geometri
  - Ekvation för plan/linjer (med och utan parameterform.)
  - Skärning mellan {linje,plan} och {linje,plan}: lös ekvationssystem!
  - Avstånd mellan {punkt,linje,plan} till {linje,plan}: projicera! (Alternativ: ställ upp ekvationsystem för ortogonalitet etc och lös.)
- Matriser
  - Speciella matriser: enhetsmatriser, diagonala, över-triangulära, undertriangulära.
  - Transponat: med $A = (a_{ij})$ är $A^t = (a_{ji})$. A är *symmetrisk* om $A^t = A$. Notera att $(AB)^t = B^t A^t$.
  - En linjär avbildning $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kan beskrivas med en $n \times m$ matris. ("Ta reda på var enhetsvektorerna tar vägen".)
  - Viktiga geometriska avbildningar: vridning, spegling, projektion.
- Ekvationssystem
  - Skrivs kort som: $Ax = b$.
  - Om $b = 0$ finns alltid den *triviala lösningen* $x = 0$.
  - Hur lösa? Gausselimination! (Gör radoperationer tills systemet blir på trappform, bakåtsubstituera sedan.)
  - Minstakvadratmetoden: Om $Ax = b$ saknar lösning, hitta "bästa möjliga lösning", dvs minimera felet $|Ax - b|$. Hur? Lös

$$A^t Ax = A^t b.$$

- Determinanter
  - Geometrisk tolkning: $|\det(A)|$ ger area/volym (i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$.)
  - Viktig egenskap: determinanten som funktion i godtycklig rad/kolonn är linjär.

  - $\det(A)$ oförändrad vid vissa rad/kolonnoperationer (t.ex. lägg till multipel av en rad till en annan rad.) *Byter tecken* om vi byter plats på två rader/kolonner.
  - Regler: $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(I) = 1$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
  - Uträkning av $\det(A)$.
    * 2×2: formel.
    * 3×3: formel eller Sarrus (men se även nedan.)
    * $n \times n$, $n > 3$:
      · $\det(A)$ lätt att räkna ut om A är övertriangulär - "gör om" A till övertriangulär mha radoperationer.
      · Utveckling efter rad/kolonn (speciellt om en rad/kolonn har många nollor.)
- Determinanter och ekvationssystem
  - Om A är kvadratisk har ekvationssystemet $Ax = b$
    * *precis en* lösning oavsett vad b är om $\det(A) \neq 0$.
    * ingen, eller oändligt många lösningar (det beror på b) om $\det(A) = 0$.
- Ickekvadratiska system: om $Ax = b$ har fler obekanta än ekvationer så har:
  - $Ax = 0$ oändligt många lösningar.
  - $Ax = b$, $b \neq 0$ antingen oändligt många lösningar, eller ingen lösning.
- Baser, beroende, oberoende.
  - *Linjärkombination*: uttryck på formen
    $$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k$$
    där $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är vektorer och $x_1, \ldots x_k$ skalärer.
  - *Linjärt oberoende*:
    $$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k = 0$$
    endast om $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.
  - *Linjärt beroende*: kan hitta $x_1, \ldots, x_k$, ej alla lika med noll, så att
    $$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k = 0.$$
  - Kolonnvektorer i en kvadratisk matris är oberoende $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.
  - *Bas* för $\mathbb{R}^n$: samling vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ så att
    * $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är *oberoende.*
    * *Alla* $w \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som
      $$w = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_kv_k.$$
      ($x_1, x_2, \ldots, x_k$ kallas *koordinater för* w *i basen* $v_1, \ldots, v_k$.)
  - Om $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är *oberoende* vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar de en bas.
- Inverser
  - Om A är kvadratisk matris och B är en matris så att $AB = BA = I$ (där I är identitetsmatrisen) är A *inverterbar.* Matrisen B skrivs oftast som A^{-1}.
  - A inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.
  - Hur finna A^{-1}? Ställ upp ekvationssystem $(A|I)$ och gör radoperationer tills du får $(I|B)$; B är då inversen till A.
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Egenvärden/egenvektorer
  - Om A är kvadratisk matris, $v \neq 0$ en vektor och $\lambda \in \mathbb{R}$ så att
  $$Av = \lambda v$$
  säger vi att v är en *egenvektor* till A med *egenvärdet* λ.
  - Hur hitta egenvärden? Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.
  - Hur hitta egenvektor? Om $\det(A - \lambda I) = 0$ så har $(A - \lambda I)x = 0$ icketriviala lösningar - lös ekvationssystemet!
  - När kan vi hitta bas av egenvektorer?
    * Spektralsatsen: en $n \times n$-matris A har n stycken *reella* egenvärden och n stycken ortogonala egenvektorer $\Leftrightarrow A^t = A$.
    * Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har n stycken olika lösningar för en $n \times n$-matris A, så har A n stycken oberoende egenvektorer.
    * Om $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ för alla egenvärden λ, dvs samma algebraisk och geometrisk multiplicitet.
  - Om $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k$ och $v_1, \ldots, v_k$ är egenvektorer till en matris A, så är
  $$A^n w = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2 + \ldots + x_k \lambda_k^n v_k$$
  - Följd: Om $\lambda_1 = 1$ och övriga egenvärden har belopp mindre än ett så är systemet *stabilt*, dvs $A^n w$ går mot $x_1 v_1$ då $n \to \infty$.
- Baser/koordinater: $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bas för V.
  - $v = \sum x_i v_i$ omm $[v]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.
  - $[T]_B$ definieras av:
  $$\begin{tikzcd} v \in V \arrow[r, "T"] \arrow[d] & V \ni Tv \arrow[d] \\ {[v]_B} \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_B}"] & \mathbb{R}^n \ni [Tv]_B \end{tikzcd}$$
  - Hur byta bas? Lös ekvationssystem!
  - Basbytesmatriser: B, D baser, $[v]_D = P_{DB}[v]_B$, där P_{DB} är basbytesmatrisen från B till D. Då gäller:
  $$[T]_D = P_{BD}^{-1}[T]_B P_{BD} = P_{DB}^{-1}[T]_B P_{DB}^{-1}$$
  eftersom $P_{DB}^{-1} = P_{BD}$.
  - Låt $T : V \to W$ vara linj. avb. Om $B = (u_1, \ldots, u_n)$ är bas för V, och B' är bas för W så fås matrisen för T, relativt baserna B och B' av
  $$[T]_{B',B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{B'} & [T(u_2)]_{B'} & \ldots & [T(u_n)]_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
- Abstrakta vektorrum.
  - Underrum, beroende/oberoende, bas, dimension.
  - $F : V \to W$.
    * $\ker(F) \subset V$, $\mathrm{Range}(F) \subset W$ (underrum!).
    * $\dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Range}(F)) = \dim(V)$
  - Om $\dim(V) < \infty$ och $F : V \to V$ så är F surj. omm F injektiv.
- Diagonalisering: givet kvadratisk matris A, hitta *diagonal* matris D och *inverterbar* matris P så att
$$A = PDP^{-1}$$

- Kan diagonalisera en $n \times n$-matris $A \Leftrightarrow$ matrisen A har n oberoende egenvektorer.
    - * Om $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är egenvektorer till A, med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så är
    $$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
    och D är diagonalmatrisen med $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.
- Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^n = PD^nP^{-1}$. (Poäng: D^n lätt att beräkna.)
- Om $A^t = A$ kan vi hitta *ortogonal* diagonalisering, dvs P är ortogonal.

• Kvadratiska former
- Kan skrivas $q(x) = x^tAx$ där A är symmetrisk och $x = [x_1, \ldots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$.
- Om egenvärdena till A är $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$, så är
    - * A *positivt definit* om $\lambda_1 > 0$. (q *positivt definit* om $q(x) > 0$ för $x \neq 0$.
    - * A *indefinit* om egenvärdena har olika tecken, dvs $\lambda_1 < 0, \lambda_n > 0$.
    - * $\lambda_1|x|^2 \le q(x) \le \lambda_n|x|^2$ gäller för all $x \in \mathbb{R}^n$
    - * Om $P^{-1}AP = P^tAP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sägs variabelbytet $x = Py$ *diagonalisera den kvadratiska formen* q; vi får $x^tAx = y^tP^tAPy = y^tDy = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$.
    - * P ortogonal ger att principalaxlarna för q är vinkelräta.