

TENTAMEN SF1645  
**LINJÄR ALGEBRA FÖR I1, CBIOT1 OCH CKEMV1**  
Onsdagen den 11 mars, 2009, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För betyg Fx krävs 40%, för E krävs 45%, för D krävs 55%, för C krävs 65%, för B krävs 75% och för A krävs 85%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.)

Lösningarna skall motiveras väl.

Maximalt en uppgift per blad.

1. Ett plan  $\pi$  innehåller punkterna  $P_1 = (1, 0, 1)$ ,  $P_2 = (2, 1, 2)$  och  $P_3 = (3, 2, 1)$ .

(a) Bestäm planets ekvation på formen  $Ax + By + Cz + D = 0$ . (2p)

(b) Bestäm avståndet  $d$  från punkten  $P = (4, 0, 1)$  till  $\pi$ . (1p)

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & a & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm de reella konstanter  $a$  för vilka matrisen  $A$  är inverterbar. (1p)

(b) Bestäm  $A^{-1}$  i fallet att  $a = 1$ . (2p)

3. (a) Avgör om

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende vektorer i  $\mathbb{R}^4$ . (2p)

(b) Kan vektorn

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

skrivas som linjärkombination av vektorerna  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ ? (1p)

V.G.V.

4. Bestäm den linje  $y = a + bx$  som i minstakvadratmening bäst ansluter sig till punkterna  $(1, 6)$ ,  $(2, 7)$  och  $(3, 14)$ . (3p)

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen  $A$ .  
Skriv även  $A$  på formen  $A = PDP^{-1}$ , där  $D$  är en diagonalmatris. (2p)

- (b) Bestäm en matris  $B$  sådan att  $A = B^2$ .  
Ledning:  $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . (1p)

6. Låt  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara ortogonal projektion på planet  $\pi : x - 2y + z = 0$ .  
Bestäm avbildningen  $L$ :s matris (i standardbasen). (3p)

7. Låt  $x(n)$  beteckna antalet hajar (i hundratal) och låt  $y(n)$  vara antalet tonfiskar (i tiotusental) i en bukt vid tidpunkten  $n$ .

Antag att marinbiologerna har fastställt att följande samband gäller:

$$\begin{cases} x(n+1) = 0.4x(n) + 0.6y(n) \\ y(n+1) = -0.3x(n) + 1.3y(n) \end{cases}$$

och att  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 3$ .

Vad händer med populationerna av hajar och tonfiskar då  $n \rightarrow \infty$ ? (3p)

8. En  $2 \times 2$ -matris  $X$  satisfierar ekvationen

$$AXA = AX + I,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen  $X$ . (3p)