Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN SF1645
LINJÄR ALGEBRA FÖR I1, CBIOT1 OCH CKEMV1
Onsdagen den 3 juni, 2009, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För betyg Fx krävs 40%, för E krävs 45%, för D krävs 55%, för C krävs 65%, för B krävs 75% och för A krävs 85%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.)
Lösningarna skall motiveras väl.
Maximalt en uppgift per blad.

1. Linjen l ges av
$$l \ : \ (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(1, 2, 1), \ \ t \in \mathbb{R},$$
medan planet π ges av $x - y + z = 1$.
   (a) Visa att linjen l inte skär planet π. (1p)
   (b) Beräkna avståndet d mellan l och π. (2p)

2. Lös matrisekvationen
$$AX + B = C,$$
där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
(3p)

3. Finn minstakvadratlösningen till det överbestämda ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}.$$
(3p)

V.G.V.

4. (a) Visa att vektorerna

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. (2p)

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i denna bas. (1p)

5. Lös determinantekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & x & x & 1 \\ x & x & 2x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(3p)

6. Låt $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\pi :\ x - 2y - 2z = 0$.
Bestäm avbildningen L:s matris (i standardbasen). (3p)

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen A.
Diagonalisera också matrisen A, d.v.s. ange en diagonalmatris D och en inverterbar matris P så att $A = PDP^{-1}$. (2p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} A^{-n} = \lim_{n\to\infty} (A^{-1})^n .$$

(1p)

8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

vara en så kallad sannolikhetsmatris, d.v.s. alla element i A är icke-negativa och dessutom gäller att $a + b + c = d + e + f = g + h + i = 1$. Visa att $\lambda = 1$ är ett egenvärde till A.

(3p)