KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Modelltentamen

Skrivtid: 8.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av tio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De sex första uppgifterna utgör del A och resterande uppgifter del B. De tre första uppgifterna kan ersättas med resultat från den löpande examinationen enligt beskrivingen i Kurs-PM för respektive kursomgång. Den löpande examinationen kan ge tre eller fyra poäng och det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på tentamen som räknas.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	21	18	16	14
varav från del B	11	7	3	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl!

Var god vänd!

DEL A

(1) a) Definiera begreppen *rektangulär form* och *polär form* för komplexa tal och ange sambandet mellan dem. **(2)**

b) Ange rötterna till ekvationen $z^2 + 2z + 4 = 0$ på polär form. **(2)**

(2) a) Använd Gausselimination för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 32, \\ 3x - 2y = -11, \\ 2x + 12y - 20z = 171. \end{cases}$$

(3)

b) På vilket sätt ändrar sig lösningen om det sista talet i högerledet ändras från 171 till 172? **(1)**

(3) (a) Avgör vilka tre av vektorerna $(1, 2, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(3, 2, 1)$ och $(0, 1, 2)$ som är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 30 & -40 & 26 \\ 15 & -26 & 25 \end{pmatrix}$$

och bestäm motsvarande egenvärden. **(2)**

(b) Visa att matrisen A är diagonaliserbar genom att finna en matris P och en diagonalmatris D så att $P^{-1}AP = D$. **(2)**

(4) (a) Använd vektorprodukten för att finna en linje som är vinkelrät mot det plan som innehåller de tre punkterna $A = (0, 1, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ och $C = (-1, 0, 3)$. **(2)**

(b) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 1, 2)$ till samma plan genom projektion på en linje som är vinkelrät mot planet. **(2)**

(5) (a) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. **(2)**

(b) Bestäm för vilka värden för a som de tre vektorerna $(1, a, 2)$, $(2, 1, 4)$ och $(a, 4, -1)$ är linjärt oberoende. **(2)**

(6) Vid en mätning har följande mätvärden erhållits:

t (ms)	1,0	2,0	3,0
$x(t)$ (mm)	2,1	2,4	2,8

Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden de konstanter a och b som bäst stämmer överens med mätningarna om modellen för förloppet säger att $x(t) = at + b$. (Tänk på att ange a och b med rätt enheter.) **(4)**

DEL B

(7) De fyra punkterna $(1, 3, 2)$, $(5, 3, 2)$, $(4, 2, 4)$ och $(4, 4, 1)$ ligger alla i samma plan.

(a) Förklara varför det inte finns någon linjär avbildning som skickar dessa fyra punkter på $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ och $(1, 1, 1)$. **(2)**

(b) Beskriv hur man kan finna matrisen för en linjär avbildning som sänder de tre första punkterna till $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. **(2)**

(8) I basen som ges av de tre vektorerna $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ har den linjära avbildningen för en spegling i planet $x + y + z = 0$ den enkla formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ange matrisen för samma linjära avbildning med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$, dvs för basen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. **(4)**

(9) Vi kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ genom att $x + iy$ svarar mot (x, y). Visa att multiplikation med det komplexa talet $a+bi$ då motsvarar en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och bestäm matrisen för den avbildningen med avseende på standardbasen. **(4)**

(10) Betrakta matrisekvationen

$$X^2 + X + I = 0$$

(a) Ge exempel på en 2×2-matris X som uppfyller ekvationen. **(1)**

(b) Visa att alla matriser[1] som uppfyller ekvationen har determinant 1. **(3)**

[1] med reella element