KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförsag till modelltentamen

DEL A

(1) a) Definiera begreppen *rektangulär form* och *polär form* för komplexa tal och ange sambandet mellan dem. **(2)**

b) Ange rötterna till ekvationen $z^2 + 2z + 4 = 0$ på polär form. **(2)**

Lösning 1. (a) Med rektanbgulär form menas ett komplext tal skrivet som $a + bi$, där a och b är reella tal. Med polär form menas ett komplext tal skrivet som $re^{i\phi}$, där r är beloppet av talet och ϕ är argumentet, dvs vinkeln mot den positiva reella axeln. Vi kan omvandla från polär form till rektangulär form genom

$$re^{i\phi} = (r\cos\phi) + (r\sin\phi)i.$$

(b) Vi kan kvadratkomplettera ekvationen och får då

$$(z+1)^2 + 3 = 0$$

vilket gör att vi kan lösa ekvationen genom

$$z + 1 = \pm i\sqrt{3} \quad \iff \quad z = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Vi ska nu omvandla till polär form och ska finna beloppet och argumenten för de bägge lösningarna. Eftersom de är konjugerade har de samma belopp, $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, och argument med motsatta tecken. Eftsersom $2\cos\phi = -1$ och $2\sin\phi = \pm\sqrt{3}$ får vi $\phi = \pm 2\pi/3$. Alltså ges lösingarna till ekvationen av

$$z_1 = 2e^{2\pi i/3} \qquad \text{och} \qquad z_2 = 2e^{-2\pi i/3}.$$

(2) a) Använd Gausselimination för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 32, \\ 3x - 2y = -11, \\ 2x + 12y - 20z = 171. \end{cases}$$

(3)

b) På vilket sätt ändrar sig lösningen om det sista talet i högerledet ändras från 171 till 172? **(1)**

Lösning 2. (a) Vi skriver upp totalmatrisen för ekvationssystemet och utför radoperationer enligt Gausseliminationsmetoden, dvs vi börjar från övre vänstra hörnet och eliminerar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 32 \\ 3 & -2 & 0 & -11 \\ 2 & 12 & -20 & 171 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 32 \\ 0 & -8 & 12 & -107 \\ 0 & 8 & -12 & 107 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 32 \\ 0 & 1 & -3/2 & 107/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -11/4 \\ 0 & 1 & -3/2 & 107/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

där vi började med att multiplicera första raden med -3 och addera till den andra, sedan addera -2 gånger den första till den tredje. Därefter multiplicerade vi den andra raden med $-1/8$ och addade -8 gånger resultatet till den tredje. Till slut adderade vi -2 gånger den andra raden till den sista för att få en fullständigt reducerad matris. Vi kan nu införa en parameter, t, för den tredje variabeln, z, eftersom det inte finns någon ledande etta en dess kolumn. Därefter löser vi ut x och y genom de två nollskilda raderna och får

$$\begin{cases} x = -11/4 - 2t \\ y = 107/8 + 3t/2 \\ z = t \end{cases}$$

(b) När vi gör samma sak, men ändrar 171 till 172 kommer vi inte att få noll i den sista kolumnen på den sista raden. Eftersom det svarar mot en ekvation som säger $1 = 0$, kan det inte finnas några lösningar till systemet. Allstå ändrar sig lösingsmängden från att vara en linje till att vara tomma mängden om vi ändrar högerledet på det viset.

(3) (a) Avgör vilka tre av vektorerna $(1,2,1)$, $(3,4,2)$, $(3,2,1)$ och $(0,1,2)$ som är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 30 & -40 & 26 \\ 15 & -26 & 25 \end{pmatrix}$$

och bestäm motsvarande egenvärden. **(2)**

(b) Visa att matrisen A är diagonaliserbar genom att finna en matris P och en diagonalmatris D så att $P^{-1}AP = D$. **(2)**

Lösning 3. (a) Vi multiplicerar matrisen med de fyra vektorerna för at se vilka som är egenvektorer. Vi kan ställa vektorerna som kolonner i en 3×4-matris:

$$\begin{pmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 30 & -40 & 26 \\ 15 & -26 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & 54 & 0 \\ -24 & -18 & 36 & 12 \\ -12 & -9 & 18 & 24 \end{pmatrix}$$

Vi ser nu att den första, tredje och fjärde kolomnen är multipler av motsvarande kolonner i den ursprungliga matrisen. Vi drar slutsatsen att dessa är egenvektorer och motsvarande egenvärden är -12, 18, 12.

(b) Vi kan nu diagonalisera matrisen med hjälp av en matris P som har egenvektorerna som kolonner. Vi får att

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow AP = \begin{pmatrix} -12 & 54 & 0 \\ -24 & 36 & 12 \\ -12 & 8 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

dvs $AP = PD$, där D är diagonalmatrisen med diagonalelement $(-12, 18, 12)$. Vi kan skriva om $AP = PD$ som $P^{-1}AP = D$ genom att multiplicera med P^{-1} till vänster.

(4) (a) Använd vektorprodukten för att finna en linje som är vinkelrät mot det plan som innehåller de tre punkterna $A = (0, 1, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ och $C = (-1, 0, 3)$. **(2)**

(b) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 1, 2)$ till samma plan genom projektion på en linje som är vinkelrät mot planet. **(2)**

Lösning 4. (a) Eftersom punkterna ligger i planet, kommer vektorerna mellan dem att vara vinkelräta mot de vektorer som är vinkelräta mot planet. Alltså kan vi få riktningsvektorn för den sökta linjen som

$$\begin{aligned} \overline{n} &= \overline{AB} \times \overline{AC} = ((0, 1, 1) - (0, 1, 2)) \times ((-1, 0, 3) - (0, 1, 2)) \\ &= (0, 0, -1) \times (-1, -1, 1) \\ &= (0 \cdot 1 - (-1)(-1), (-1)(-1) - 0 \cdot 1, 0 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1)) \\ &= (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

Alltså kommer linjen $(x, y, z) = t(-1, 1, 0)$ att vara vinkelrät mot planet.

(b) För att bestämma avståndet med hjälp av projektion tar vi ett punkt i planet, exempelvis A och projicerar vektorn AP på linjen som är vinkelrät mot planet. Vi får

$$\mathrm{Proj}_{\overline{n}} \overline{AP} = \frac{(5, 0, 0) \cdot (-1, 1, 0)}{(-1, 1, 0) \cdot (-1, 1, 0)}(-1, 1, 0) = \frac{-5}{2}(-1, 1, 0) = (5/2, -5/2, 0).$$

Avståndet mellan punkten och planet ges nu av längden av denna vektor, dvs

$$d = |(5/2, -5/2, 0| = 5/2|(1, -1, 0)| = 5/2\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 5/2\sqrt{2}.$$

(5) (a) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. **(2)**
(b) Bestäm för vilka värden för a som de tre vektorerna $(1, a, 2)$, $(2, 1, 4)$ och $(a, 4, -1)$ är linjärt oberoende. **(2)**

Lösning 5. (a) Tre vektorer, $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende om den enda linjärkombination av dem som blir nollvektorn är $0 \cdot \overline{u} + 0 \cdot \overline{v} + 0 \cdot \overline{w}$, dvs om

$$a \cdot \overline{u} + b \cdot \overline{v} + c \cdot \overline{w} = 0 \quad \Longrightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0).$$

(b) För att avgöra om det finns nollskilda lösningar till ekvationssystemet

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kan vi titta på determinanten av koefficientmatrisen. Vi har att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1-2a & 4-a^2 \\ 0 & 0 & -1-2a \end{vmatrix} = -(1+2a)(1-2a)$$

Eftersom ekvationssystemet saknar nollskilda lösningar precis om determinanten är skild från noll kan vi dra slutsatsen att de tre givna vektorerna är linjärt oberoende precis om $a \neq \pm 1/2$.

(6) Vid en mätning har följande mätvärden erhållits:

t (ms)	1,0	2,0	3,0
$x(t)$ (mm)	2,1	2,4	2,8

Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden de konstanter a och b som bäst stämmer överens med mätningarna om modellen för förloppet säger att $x(t) = at + b$. (Tänk på att ange a och b med rätt enheter.) **(4)**

Lösning 6. För att hitta en linje genom punkterna skulle vi vilja lösa det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1,0a & + & b & = 2,1 \\ 2,0a & + & b & = 2,4 \\ 3,0a & + & b & = 2,8 \end{cases}$$

För att lösa detta system med hjälp av minsta kvadratmetoden skriver vi upp normalekvationen, vilket innebär att vi multiplicerar båda led till vänster med transponatet av koefficentmatrisen. Vi får därmed ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 2,0 & 3,0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0 & 1 \\ 2,0 & 1 \\ 3,0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0 & 2,0 & 3,0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,1 \\ 2,4 \\ 2,8 \end{pmatrix}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,3 \\ 7,3 \end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet med hjälp av Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15,3 \\ 6 & 3 & 7,3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15,3 \\ 0 & 3 & 5,2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 0 & 4,9 \\ 0 & 3 & 5,2 \end{array}\right)$$

vilket leder till att minsta kvadratlösningen är $(a, b) \approx (0,35, 1,73)$.

DEL B

(7) De fyra punkterna $(1, 3, 2)$, $(5, 3, 2)$, $(4, 2, 4)$ och $(4, 4, 1)$ ligger alla i samma plan.

(a) Förklara varför det inte finns någon linjär avbildning som skickar dessa fyra punkter på $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ och $(1, 1, 1)$. **(2)**

(b) Beskriv hur man kan finna matrisen för en linjär avbildning som sänder de tre första punkterna till $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. **(2)**

Lösning 7. (a) Eftersom de fyra punkterna ligger i samma plan kommer alla linjära avbildningar skicka dem till ett nytt plan. Om de uppfyller en viss linjär relation, så kommer bilderna av dem via en linjär avbildning att uppfylla samma linjära relation. De andra fyra punkterna ligger inte i ett plan, eftersom de tre första punkterna spänner planet $x + y + z = 1$, där den fjärde punkten inte ligger.

(b) För att finna en linjär avbildning T som skickar de tre första punkterna till $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$ behöver vi finna en matris A som uppfyller

$$A \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs det är samma sak som att finna inversen till matrisen med de tre vektorerna som kolonner. Detta är möjligt eftersom determinanten nollskild, vilket vi kan se genom

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -12 & -10 \\ 0 & -8 & -4 \end{vmatrix} = (-12)(-4) - (-8)(-10) = -32$$

(8) I basen som ges av de tre vektorerna $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ har den linjära avbildningen för en spegling i planet $x + y + z = 0$ den enkla formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ange matrisen för samma linjära avbildning med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$, dvs för basen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. **(4)**

Lösning 8. Vi använder den givna basen av egenvektorer för att beskriva basbytet som diagonaliserar matrisen. Om vi betecknar den sökta matrisen för A, den givna diagonalmatrisen för D och matrisen med våra egenvektorer som kolonner för P får vi att

$$P^{-1}AP = D$$

och vi kan därmed lösa ut A som

$$A = PDP^{-1}$$

Vi kan beräkna inversen matrisen P genom Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Alltså kan vi beräkna A genom

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(9) Vi kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ genom att $x + iy$ svarar mot (x, y). Visa att multiplikation med det komplexa talet $a+bi$ då motsvarar en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och bestäm matrisen för den avbildningen med avseende på standardbasen. **(4)**

Lösning 9. Multiplikation med talet $a + bi$ ger att $x + iy$ avbildas på $(a + ib)(x + iy) = ax - by + (ay + bx)i$. Om vi identifierar det komplexa talet $x + iy$ med talparet (x, y) har vi därmed att

$$(x, y) \longmapsto (ax - by, ay + bx)$$

Detta svarar mot multiplikation av matriser enligt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Alltså är det en linjär avbildning och matrisen med avseende på standardbasen ges av

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(10) Betrakta matrisekvationen

$$X^2 + X + I = 0$$

(a) Ge exempel på en 2×2-matris X som uppfyller ekvationen. **(1)**

(b) Visa att alla matriser[1] som uppfyller ekvationen har determinant 1. **(3)**

Lösning 10. (a) Det finns olika sätt att angripa problemet. Ett sätt är att multiplicera matrisekvationen med $X - I$ och vi får då

$$X^3 - I = 0.$$

Det är klart att detta är uppfyllt om X svarar mot en rotation med en tredjedels varv. Därför kan vi prova med

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

och vi ser att det är en lösning till den ursprungliga ekvationen eftersom

$$X^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

och därmed

$$X^2 + X + I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ett annat sätt är att utnyttja vad vi lärde oss i den föregående uppgiften och då ska vi leta efter en komplex lösning till ekvationen $z^2 + z + 1 = 0$. Lösningen till denna ekvation ges av $z = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$, vilket enligt lösningen till uppgiften ovan ges oss samma matris X.

Det finns många fler lösningar, exempelvis

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

men de kan vara svåra att hitta utan att kunna lite mer linjär algebra än vad som ingår i denna kurs. I själva verket uppfyller varje matris vars karaktäristiska polynom är lika med $\lambda^2 + \lambda + 1$ den givna ekvationen.

(11) Eftersom en matris som uppfyller ekvationen $X^2 + X + I = 0$ också uppfyller ekvationen $X^3 = I$ enligt ovan har vi att $\det(X^3) = \det(X)^3 = 1$. Om X har reella element är determinanten ett reellt tal och det finns endast en reell lösning till $x^3 = 1$, vilket ger att $\det X = 1$.

---

[1] med reella element