Inlämningsuppgift i SF1624 Algebra & geometri

av Alan Sola (F01), pers.nr: XXXXXX-YYYY

i samarbete med C. Kent (M1) och B. Wayne (M4)

---

1. Rotationer:

Vi arbetar i standardbasen

$$\mathcal{S} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En rotation kring x-axeln har följande effekt på basvektorerna:

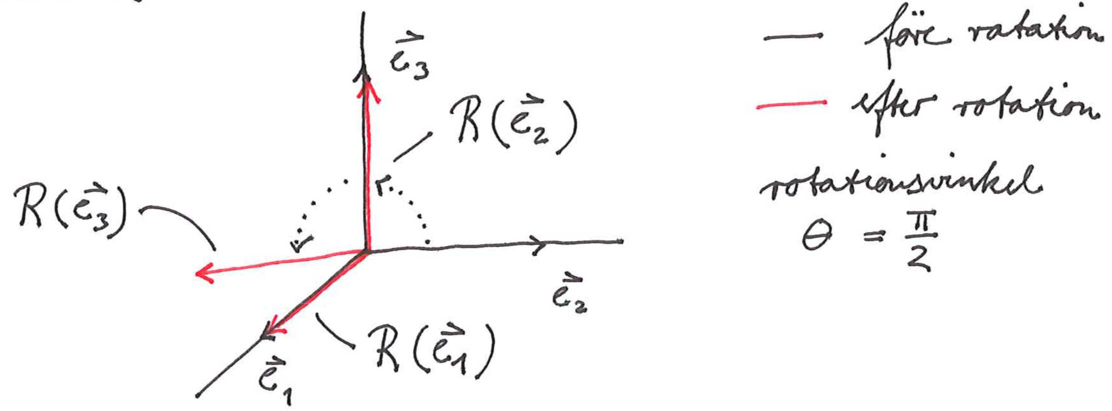


fig. 1

Ur fig. 1 kan vi avläsa att

$$R(\vec{e}_1) = \vec{e}_1,\ R(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 \text{ och } R(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2.$$

Matrisen $[R]$ för rotationsavbildningen relativt standardbasen blir alltså enligt sats 4.3.3

$$[R] = \left(R(\vec{e}_1) \vdots R(\vec{e}_2) \vdots R(\vec{e}_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.S. Vi ska nu bestämma bilden av vektorn

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

under avbildningen R.

Då $\vec{v}$ är angiven i standardbasen blir bilden av $\vec{v}$

$$R(\vec{v}) = [R]\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Låt oss nu bestämma matrisen $[R^3]$ hörande till den sammansatta avbildningen

$$R^3 = R \circ R \circ R.$$

Vi vet att (se formel (22) på s. 193)

$$[R^3] = [R][R][R] = ([R])^3,$$

där högerledet ska tolkas som multiplikation av matriser.

Vi får

$$[R][R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och därmed

$$([R])^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.f. Vi betraktar nu den inversa avbildningen R^{-1} och bestämmer dess matris.

R roterar rummet <u>moturs</u> med $\frac{\pi}{2}$ radianer kring x-axeln. Vi inser därför att R^{-1} roterar rummet <u>medurs</u> med $\frac{\pi}{2}$ radianer, återigen kring x-axeln.

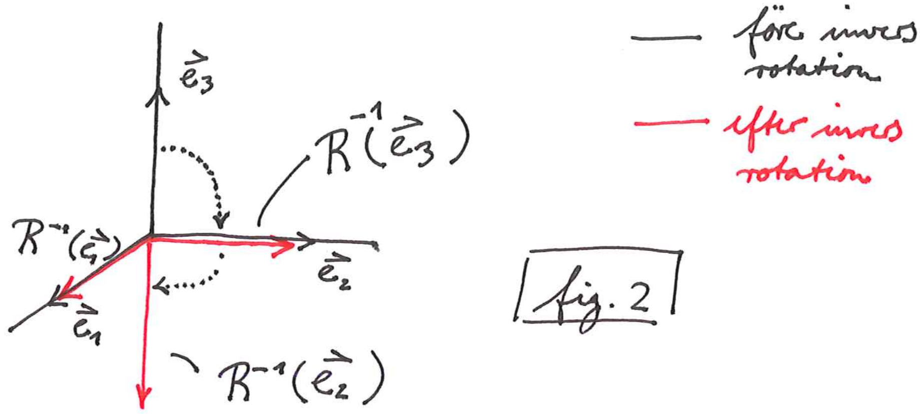


fig. 2

Matrisen för R^{-1} relativt standardbasen är således

$$[R^{-1}] = \left(R^{-1}(\vec{e}_1) \,\vdots\, R^{-1}(\vec{e}_2) \,\vdots\, R^{-1}(\vec{e}_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu att

$$[R^3] = [R^{-1}]$$

och då matrisen för en avbildning relativt en bas bestämmer avbildningen entydigt följer det att

$$R^3 = R^{-1}.$$

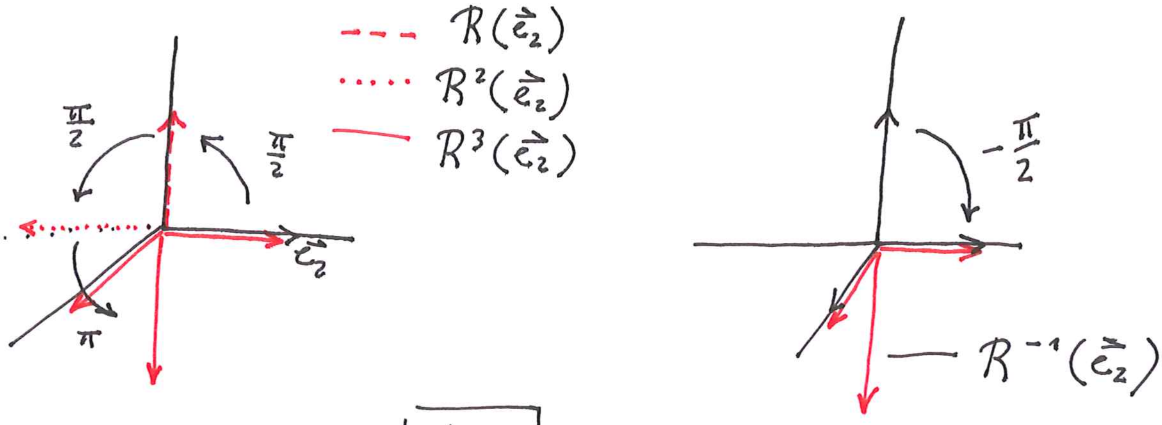


fig. 3

A.J. I figuren ser vi att $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ och $\vec{e}_3$ vrids $\theta = \frac{\pi}{2}$ av R^{-1} medurs. Varje gång vi tillämpar R utför vi en rotation på $\theta = \frac{\pi}{2}$ moturs.

Vi inser nu att R^3 därför utför en rotation på $\theta = \frac{3\pi}{2}$ radianer moturs.

En rotation med $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (dvs. $\frac{\pi}{2}$ medurs) ger emellertid samma effekt som en rotation med $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Detta är den geometriska förklaringen till $R^3 = R^{-1}$.

Vi beräknar nu $\det([R])$, $\det([R^{-1}])$.

Vi har

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot (-1)) = 1$$

enligt räknereglerna för determinanter, och detta ger

$$\det([R]) = 1.$$

I nästa steg beräknar vi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot 1) = 1,$$

och vi får

$$\det([R^{-1}]) = \det([R^3]) = 1.$$

Alla tre avbildningar är således inverterbara (vilket man även inser genom geometriska överläggningar).

A.J. Absolutbeloppet av determinanten av en matris kan tolkas som volymen av den parallellepiped som spänns upp av raderna i matrisen, sedda som vektorer.

Vi tar matrisen [R] som exempel. Dess rader spänner upp en kub:

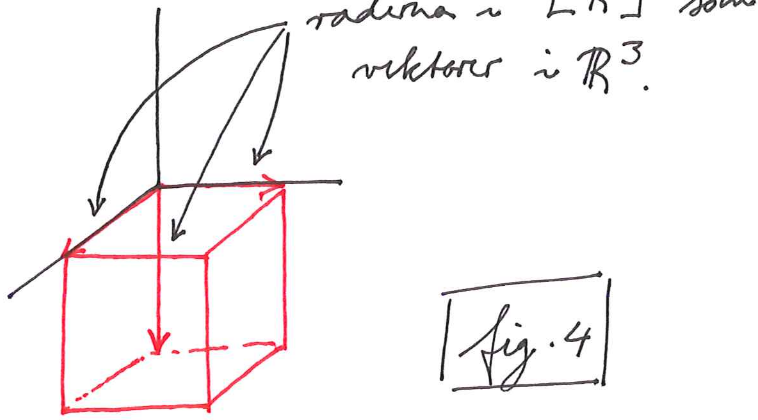


fig. 4

Motsvarande gäller för $[R^{-1}]$ och $[R^3]$, och alla dessa kuber har volym 1.

—— * ——

A.S.

2. Projektioner

Vi betecknar planet som ges av ekvationen

$$x - z = 0$$

med Π.

Följande skisser hjälper oss att visualisera planet:

fig. 1

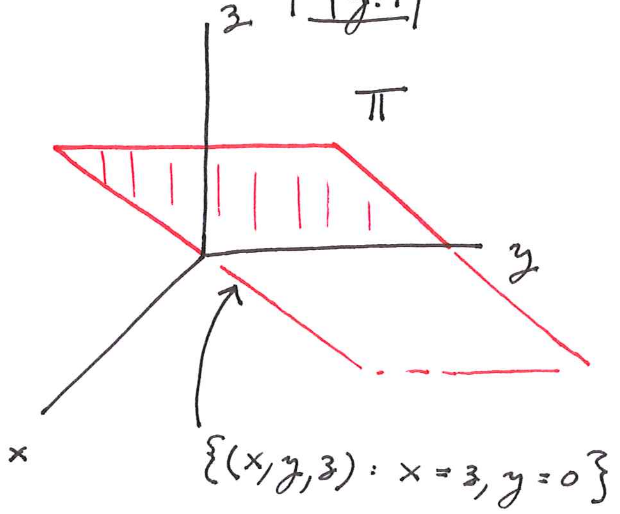
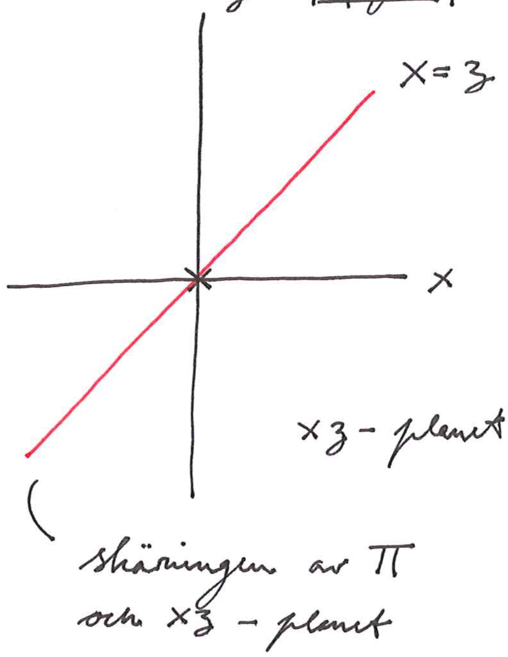


fig. 2



Vi arbetar återigen i standardbasen för $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Matrisen för projektionen P relativt standardbasen ges av

$$[P] = \left(P(\vec{e}_1) \,\vdots\, P(\vec{e}_2) \,\vdots\, P(\vec{e}_3) \right).$$

A.S. Vi observerar först att vektorn $\vec{e}_2$ ligger i planet Π eftersom detta plans ekvation är

$$x + 0 \cdot y - z = 0.$$

Således har vi

$$P(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$

enligt definitionen av en projektion (jmfr. sats 6.3.4).

Symmetrin i problemet ger vidare att

$$P(\vec{e}_1) = P(\vec{e}_3),$$

så det räcker att bestämma $P(\vec{e}_1)$.

Vi betraktar återigen en skiss.

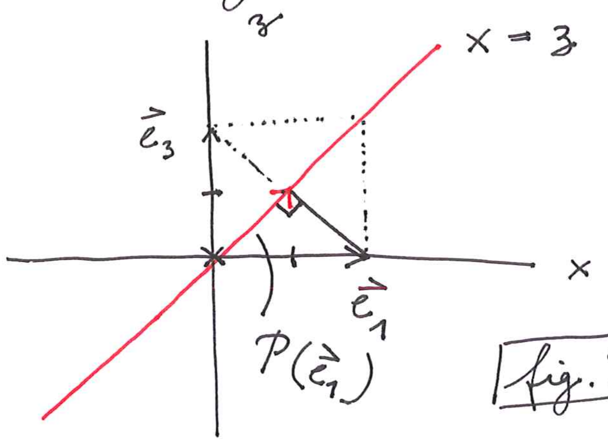


fig. 3

Vi har ju $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, och därmed kommer $P(\vec{e}_1)$ ej ha någon komponent i $\vec{e}_2$-led. Då spetsen på $P(\vec{e}_1)$ hamnar i skärningspunkten för diagonalerna i en kvadrat med sidlängd 1 (se fig. 3) får vi att

$$P(\vec{e}_1) = \tfrac{1}{2}\vec{e}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{e}_3.$$

A. S. Detta ger oss

$$P(\vec{e}_1) = P(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrisen för P blir alltså

$$[P] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bilden av vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ under projektionen P blir

$$P(\vec{v}) = [P]\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer matrisen för $P^2 = P \circ P$ genom att utnyttja ~~att~~

$$[P^2] = [P][P].$$

Vi beräknar produkten av matriserna och får

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \cdot 1 & 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vi ser ~~att~~ $[P^2] = [P][P] = [P]$

eller $([P])^2 = [P]$.

A.J.

För själva projektionsavbildningen betyder detta att

$$P^2 = P.$$

Förklaringen för detta är att den projicerade vektorn $P(\vec{x})$ av en godtycklig vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tillhör planet och saknar komponent $\neq \vec{0}$ i planets ortogonala komplement $\Pi^{\perp}$.

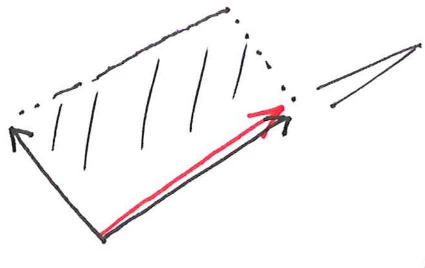
När vi tillämpar projektionen P ännu en gång till ska vi "ta ut" den komponent av $P(\vec{x})$ som tillhör Π (dvs. hela $P(\vec{x})$) och "glömma" den komponent av $P(\vec{x})$ som tillhör $\Pi^{\perp}$ (dvs. $\vec{0}$).

Alltså

$$P(P(\vec{x})) = P(\vec{x}) \; ; \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Determinanten för matrisen $[P]$ är 0 eftersom två kolonner i $[P]$ är identiska.

Detta betyder att den parallellepiped som spänns upp av raderna i $[P]$ är degenererad och har volym 0.



$\boxed{\text{fig. 4}}$

— * —

Alla hänvisningar är till Anton & Rorres Elementary Linear Algebra 9th ed.