Exempel på induktionsbevis

Alan Sola

13 september 2009

Problem 1.5

Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{1}$$

samt att

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2n}. \tag{2}$$

Lösning

Vi börjar med att visa att den första likheten gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Basfallet inträffar för $n = 1$. Summan i vänsterledet i (1) reduceras i detta fall till en term:

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2},$$

medan högerledet är

$$\frac{1}{1+1}.$$

Alltså är (1) sant för $n = 1$. Låt oss nu anta att

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1} \tag{3}$$

gäller för något heltal N med $N \geq 1$. Vi har att visa att detta medför att

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N+1}{(N+1)+1}. \tag{4}$$

Betrakta nu uttrycket i vänsterledet i ovanstående ekvation. Vi delar först upp summan:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{(N+1)[(N+1)+1]} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

Vi använder nu induktionsantagandet (3) för att ersätta summan i högerledet med $N/(N+1)$ och får att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \frac{N}{N+1} \\ &= \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \frac{N(N+2)}{(N+1)(N+2)} = \frac{N^2+2N+1}{(N+1)(N+2)} \\ &= \frac{(N+1)^2}{(N+1)(N+2)} = \frac{N+1}{N+2}.\end{aligned}$$

Det sista uttrycket $(N+1)/(N+2)$ är lika med högerledet i (4), och således är induktionssteget avslutat. Enligt induktionsprincipen gäller alltså påståendet (1) för $n = 1, 2, \ldots$.

Vi ska nu visa att (2) gäller för $n = 1, 2, \ldots$ (observera att likheten är meningslös för $n = 0$).

Basfallet $n = 1$ ger oss den övre gränsen $2 \cdot 1 - 1 = 1$ som summationsgräns i högerledet, så även i detta fall reduceras summan till en term:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Högerledet i fallet $n = 1$ är

$$\frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

vilket visar att (1) gäller för $n = 1$.

Vi antar nu att

$$\sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2N} \tag{5}$$

gäller för något $N \geq 1$, och vi har att visa att detta medför att

$$\sum_{k=N+1}^{2N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2(N+1)}. \tag{6}$$

Vi betraktar vänsterledet i (6) och lägger till och drar ifrån:

$$\sum_{k=N+1}^{2N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=N}^{2N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{N(N+1)}. \tag{7}$$

Vi gör därefter en omskrivning till, nämligen

$$\sum_{k=N}^{2N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{2N(2N+1)} + \frac{1}{(2N+1)(2N+2)},$$

och vi använder sedan induktionsantagandet för att få

$$\sum_{k=N}^{2N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N(2N+1)} + \frac{1}{(2N+1)(2N+2)}.$$

Vi sätter in detta i (7) och får

$$\sum_{k=N+1}^{2N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N(2N+1)} + \frac{1}{(2N+1)(2N+2)} - \frac{1}{N(N+1)},$$

och efter en förenkling finner vi att detta uttryck är lika med $1/(2N+2)$. Detta är högerledet i (6).

Induktionsprincipen medför nu att (2) är sant för alla $n = 1, 2, \ldots$.

♦