

### Modell-Tentamen 1 i SF1625 Envariabelanalys

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

- Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen  $f(x) = xe^{-2x}$  på intervallet  $[-1, 1]$ . Besvara sedan också samma fråga för det öppna intervallet  $(-1, 1)$ .
- Para ihop nedanstående integrander och primitiva funktioner. OBS: några blir över. Visa för varje par du hittar precis hur de hänger ihop genom en formel som innehåller antingen ett integraltecken eller också en deriveringssymbol.

$$\begin{array}{cccc} \frac{x^4}{4!} & 4! \left(-\frac{1}{x}\right)^5 & 2 \ln(x^4 + 1) & 6 \sinh x \\ x^2 \ln x & 2 \arctan(x^2) & \ln x^2 + 2 \ln(e/x) & \frac{24}{x^5} \\ 0 & 3e^x + 3e^{-x} & 5! \left(-\frac{1}{x}\right)^6 & 2x \ln x \\ \frac{4x}{x^4 + 1} & 6e^x + 6e^{-x} & \frac{x^5}{5!} & x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \end{array}$$

- Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då det begränsade område som innesluts av kurvorna  $y = 5x^{-3/2}$  och  $y = \sqrt{x}$  samt linjen  $x = 1$  roteras ett varv runt  $x$ -axeln.
- Man konstruerar en ränna av tre likadana plankor som är 10 cm breda. En plankor ligger på marken, de båda andra har vinkel  $\theta$  med horisontalen. Hur ska  $\theta$  väljas för att rännan ska rymma maximal mängd vatten?
- På vilka intervall växer funktionen  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$  när  $0 < |x| < e$ .

6. Skissa grafen till funktionen  $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ . Avgör speciellt om  $f$  har några lokala maxima eller minima samt om grafen har lodrät tangent någonstans.

7. Visa hur man kan använda Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärden genom att beräkna  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right)$ .

8. A. Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en punkt  $x_0$  ?  
B. Ge exempel på en kontinuerlig funktion  $f$  som uppfyller att

$$\int_1^4 f(x) dx = -1 \quad \text{och} \quad \int_4^9 f(x) dx = 5.$$

9. Visa att  $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < n \ln n - n + 1 < \sum_{k=2}^n \ln k$ . Tips: betrakta integralen  $\int_1^t \ln x dx$ .

10. Finn ett tredjegradspolynom  $p(x)$  sådant att  $p(0) = f(0)$ ,  $p'(0) = f'(0)$ ,  $p''(0) = f''(0)$ ,  $p'''(0) = f'''(0)$ , där  $f(x) = \int_0^x e^{t^2+t} dt$ .

## Svar till modelltentamen 1

1. På  $[-1, 1]$  är max  $\frac{1}{2e}$  och min  $-e^2$ . På  $(-1, 1)$  är max  $\frac{1}{2e}$  och min saknas.
3.  $8\pi$  volymenheter
4.  $\frac{\pi}{3}$
5.  $(-e, 0)$  och  $(0, e)$
6. Lodräta tangenter i  $x = \pm\sqrt{2}$ . Min i  $x = -1$ , max i  $x = 1$ .
7. 0
10.  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$