KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Modell-Tentamen 2 i SF1625 Envariabelanalys

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

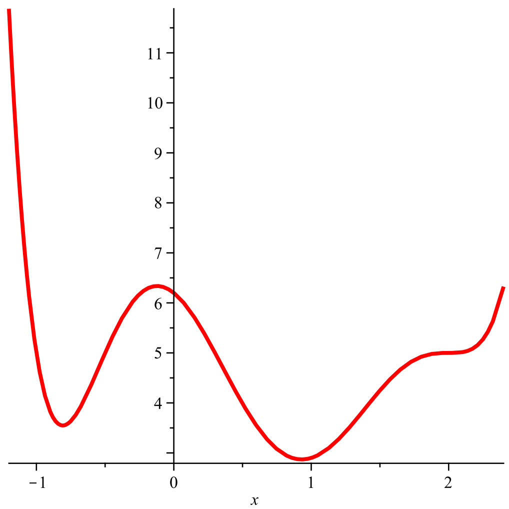
Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = 3x^3 + 16|x-1|$ och skissa kurvan $y = f(x)$.

2. Betrakta integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.
A. Skriv om integralen med hjälp av variabelsubstitutionen $t = \cos x$.
B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i A.

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området $0 \le y \le \sqrt{x}\sin x$, $0 \le x \le \pi$, roterar ett varv kring x-axeln. Ge också en förklaring till varför beräkningsformeln ser ut som den gör.

4. Här nedan ser du grafen till ett sjättegradspolynom p, dvs du ser kurvan $y = p(x)$. Skissa med ledning av detta kurvan $y = p'(x)$.



5. Beräkna integralen $\int e^{ax+b} \sin x \, dx$. Tips: använd partiell integration två gånger.

6. Lektor Hektor Sektor gillar sitt kaffe lagom varmt, dvs högst 60 grader. När det kommer ur kaffeautomaten på matematikinstitutionen håller det 90 grader celsius. Efter en minut är det 88. Om avsvalningstakten är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan kaffet och rummet (som håller 20 grader), när kan han börja dricka?

7. I vilken mening är $\int_5^\infty \frac{3}{x^2 - 3x} \, dx$ en generaliserad integral? Är den konvergent? Beräkna den!

8. Enligt Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationen $f(x) = 0$ så fås successiva approximationer till lösningen enligt formeln $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Förklara hur denna formel hänger ihop med idén bakom Newton-Raphsons metod: att gå i tangentens riktning.

9. Är $p(x) = x - x^3$ en god approximation till $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-3t^2}\, dt$?

10. Betrakta differentialekvationen $x''(t) + x(t) = 2\cos kt$.
A. Ge exempel på ett fysikaliskt förlopp som modelleras av denna typ av differentialekvation.
B. För vilka k har ekvationen en lösning $x(t)$ sådan att $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existerar?
C. Ge exempel på en sådan lösning.

Facit till modelltenta 2

1) Lokal minimipunkt: $x = 1$; lokal maximipunkt: $x = -4/3$.

2) a) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ b) $\pi/4$.

3) $\frac{\pi^3}{4}$.

4) Tänk på var derivatan är noll. Detta ger en indelning i intervall. Undersök tecknet på derivatan i vardera av dessa interval, samt uppskatta ungefär hur derivatan beter sig.

5) $\frac{e^{ax+b}(a \sin x - \cos x)}{a^2+1} + C$

6) Efter $\frac{\ln(4/7)}{\ln(34/35)}$ (≈ 19.3) minuter.

7) Integranden är kontinuerlig på hela intervallet $[5, \infty)$. Integralen är generaliserad eftersom integrationsområdet är obegränsat. Den är konvergent, och dess värde är $\ln(5/2)$.

9) Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ är $p_3(x) = x - x^3$. Således kan man säga att $p(x) = x - x^3$ är en bra approximation till $f(x)$.

10) b) Endast för $k = 0$. c) $x(t) = 2$ är en lösning till $x''(t) + x(t) = 2$ (här är $k = 0$) sådan att $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existerar.