KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Modell-Tentamen 3 i SF1625 Envariabelanalys

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = 2\arctan x - \ln(1 + x^2)$.

2. Beräkna med partiell integration integralen $\displaystyle\int_1^2 x^4 \ln x \, dx$.

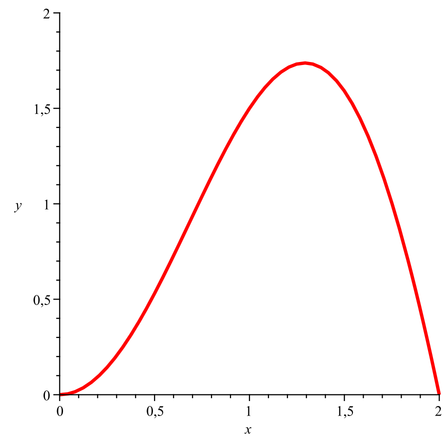
3. Tolka gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2}$ som en integral och beräkna det genom att beräkna integralen.

4. Låt $f(x) = \ln|\sin x|$. Beräkna $f'''(x)$.

5. Kurvorna $y = x^2 + ax + b$ och $y = cx - x^3$ har gemensam tangentlinje i punkten $(1, 0)$. Bestäm a, b och c.

6. Hur många reella lösningar har ekvationen $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$? Hitta ett intervall av längd $1/4$ som innehåller en lösning.

7. Här nedan ser du grafen $y = f(x)$ till en funktion f. Gör med ledning av detta en (grov) skiss av kurvan $y = g(x)$, där $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



8. A. Utgå från produktregeln för derivator och förklara hur och varför partiell integration fungerar. Ge också ett exempel.
B. Utgå från kedjeregeln för derivator och förklara hur och varför variabelsubstitution i integraler fungerar. Ge också ett exempel.

9. A. Definiera vad som menas med derivatan av en funktion $f(x)$ i en punkt x_0.
B. Använd derivatans definition för att bestämma $f'(x)$ då $f(x) = \sqrt{x+4}$.
Trixtips: förläng med konjugatet.

10. Betrakta differentialekvationen $x'(t) = -t + (x(t))^2$ med begynnelsevärdet $x(0) = 1$. Det finns inget enkelt sätt att lösa differentialekvationen analytiskt, men vi kan approximera lösningen genom Taylorutveckling.
A. Använd differentialekvationen för att bestämma $x'(0)$.
B. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 i origo till $x'(t)$.

Svar till modelltenta 3

1. $V_f = (-\infty, \frac{\pi}{2} - \ln 2]$

2. $\frac{160\ln(2)-31}{25}$

3. $\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$

4. $f'''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

5. $a = -4$, $b = 3$, $c = 1$

6. En reell rot som finns i intervallet $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

7. Observera att $g'(x) = f(x) \geq 0 \Rightarrow g$ är växande från värdet 0 till det största värdet vid $x = 2$. Man kan också se att $g''(x) = f'(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1.3$ och att $g''(x) \leq 0$, $1.3 \leq x \leq 2$. Detta betyder att g är konkav uppåt respektive nedåt på dessa intervall med en inflektionspunkt i $x = 1.3$.

10. (a) $x'(0) = 1$
(b) $p_3(t) = 1 + t + 2t^2 + \frac{7}{3}t^3$