SF1625 Envariabelanalys för CDATE1
övningar inför kontrollskrivning 2

Här följer några övningsuppgifter inför KS 2. Som vanligt gäller att endast en liten del av materialet täcks av dessa uppgifter.

1. (a) Förklara begreppet *Riemannsumma.*

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

2. Man har en funktion $f(x)$ som är integrerbar och växande på $[0,1]$ och $f(0)=1$, $f(1)=5$. För partitionen P av $[0,1]$ i åtta lika stora delar beräknas den undre Riemannsumman (i boken kallad $L(f,P)$) till $9/4$.

(a) Bestäm den övre Riemannsumman $U(f,P)$.

(b) Vad kan man säga om värdet på integralen $I=\int_0^1 f(x)dx$?

3. Antag att $f(x)$ är en udda funktion som är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Bestäm

$$\frac{d}{dx}\int_{-x^2}^{x^2}\left(f(t)+e^{-t^2}\right)dt.$$

4. Finn arean hos det område i xy-planet som avgränsas av kurvorna $y=-2\arctan(x)$, $x=1$ och $y=\sqrt{x}$.

5. Använd upprepad partiell integration för att bestämma alla primitiva funktioner till $f(x)=2e^x\cos(x)$.

6. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2}\frac{4\sin(x)+5}{\sin^2(x)+3\sin(x)+2}\cos(x)dx.$$

7. En skål konstrueras genom att låta kurvan $y=x^2$ rotera kring y-axeln. Om man häller i 18 volymenheter vätska, hur högt når vätskenivån?

8. Man konstruerar en tunn cirkulär skiva med radie R cm och densitet som varierar med avståndet r (cm) från centrum enligt $\rho(r)=1/\sqrt{r^2+1}$ (g/cm^2). Vad väger skivan?

Svar:

1. (a) Se Adams-Essex, sidan 303.
(b) 2

2. (a) $\frac{11}{4}$
(b) $\frac{9}{4} \leq I \leq \frac{11}{4}$.

3. $4xe^{-x^4}$

4. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \ln 2$ areaenheter

5. $e^x(\cos(x) + \sin(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$

6. $3\ln 3 - 2\ln 2$

7. $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ längdenheter

8. $2\pi(\sqrt{R^2+1} - 1)$ gram