

## SF1625 Envariabelanalys för CDATE1 övningar inför kontrollskrivning 3

Här följer några övningsuppgifter inför KS3. Uppgifterna täcker (en del av) materialet från de avsnitt i Adams-Essex som inte ingick i KS1 eller KS2. Observera dock att KS3 behandlar HELA kursens innehåll utom avsnitten om differentialekvationer.

1. Beräkna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

2. Visa olikheten

$$2\sqrt{N+1} - 2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}}$$

genom att tolka högerledet som en överskattning av en lämplig integral.

3. Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

är konvergent oavsett värdet på konstanten  $k$ .

4. Approximera  $e^{-1/3}$  med hjälp av ett lämpligt valt Maclaurinpolynom så att felet blir mindre än en tusendel. (En motivering till att din approximation klarar kravet krävs förstås.)

5. Härled den "kända" Maclaurinserien för  $\ln(1+x)$  genom att utgå från följande identitet för en geometrisk serie då  $|x| < 1$ :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

6. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 8 för funktionen  $\cos(x^2)$  och använd resultatet för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^4 - 2 \cos(x^2)}{x^8}.$$

7. Finn Taylorpolynomet av grad 2 kring  $x = 1$  för funktionen

$$f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

**Svar:**

1.  $\frac{3}{4}$

4.  $\frac{58}{81}$ ; felet är positivt och mindre än  $\frac{1}{81 \cdot 24} < \frac{1}{1000}$ .

5. Se Adams-Essex, sidan 533.

6.  $1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8; -\frac{1}{12}$

7.  $\frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{e}(x-1)^2$