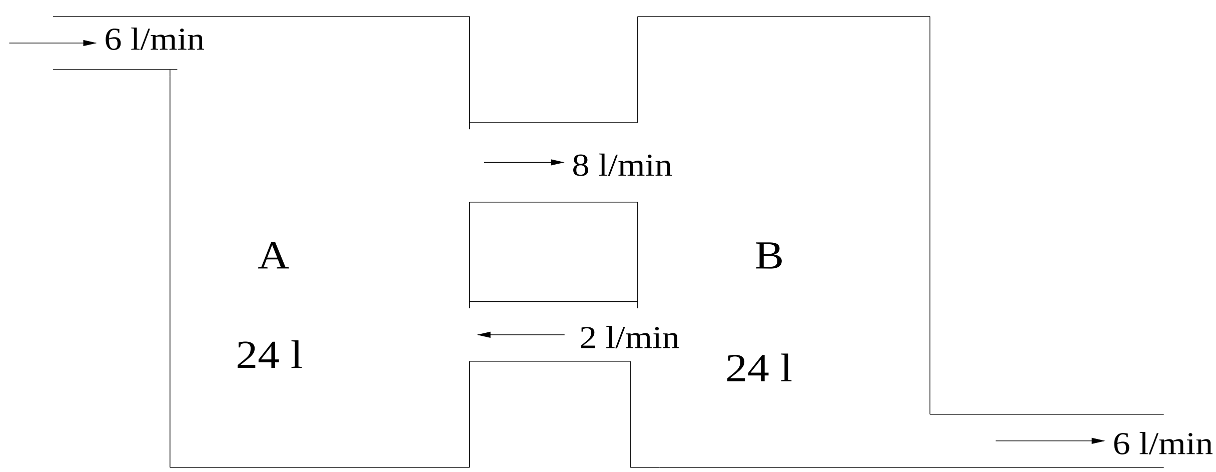
ETT EXEMPEL MED TVÅ TANKAR.

Antag att vi har två lika stora tankar med volymen 24 l, innehållande en saltlösning, **A** och **B**. Antag att vi har ett flöde av rent vatten i tank **A** med hastigheten 6 l/min och en dränering från tank **B** med samma hastigheten så att vätskemängden i systemet är konstant. Saltlösningen i båda tankarna blandas genom ett vätskeflöde mellan tankarna. Flödet från **A** till **B** är 8 l/min och från **B** till **A** 2 l/min.
Bestäm saltmängden i var och en av de två tankarna vid tiden $t$ om mängden salt vid $t_0 = 0$ var $x_0$ kg i tank **A** och $y_0$ kg i tank **B**.




*LÖSNING:*
Låt $x(t)$ och $y(t)$ beteckna mängden av salt i tankarna **A**, resp. **B** vid tiden $t$.
Koncentrationen i tank **A** är då $\frac{x(t)}{24}$ kg/l och koncentrationen i **B** är $\frac{y(t)}{24}$ kg/l.
Förändringen av saltinnehållet i **A** sker endast genom flöde till och från **B**. Det inkommande flödet är: $2 \cdot \frac{y(t)}{24} = \frac{y(t)}{12}$ kg/min och det utgående flödet är $8 \cdot \frac{x(t)}{24} = \frac{x(t)}{3}$ kg/min.
Förändringen av saltmängden i tank **A** ges, alltså, av:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y(t)}{12} - \frac{x(t)}{3} \Leftrightarrow x' = -\frac{x}{3} + \frac{y}{12}$$

och p.s.s. i tank **B**:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x(t)}{3} - \frac{y(t)}{12} - 6 \cdot \frac{y(t)}{24} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{3} - \frac{y}{3}.$$

Alltså vi vill lösa ekvationssystem:

$$\begin{cases} x' &= -\frac{x}{3} + \frac{y}{12} \\ y' &= \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \end{cases}$$

Ett sätt att lösa systemet är följande.
Lös ut $x$ från andra ekvationen: $x = 3y' + y$. Derivera och sätt in i första ekvationen. Vi får: $x' = 3y'' + y'$ och $3y'' + y' = -y' - \frac{y}{3} + \frac{y}{12} \Leftrightarrow 3y'' + 2y' + \frac{y}{4} = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{12}y = 0$ som är en linjär, homogen ekvation av andra ordning med karakteristiska ekvationen: $m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{1}{12} = 0$ med rötterna $m_1 = -\frac{1}{2}$ och $m_2 = -\frac{1}{6}$ och den allmänna lösningen:

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{t}{2}} + C_2 e^{-\frac{t}{6}}.$$

Insättningen i $x(t) = 3y'(t) + y(t)$ ger:

$$x(t) = 3\left(-\frac{C_1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{C_2}{6}e^{-\frac{t}{6}}\right) + C_1 e^{-\frac{t}{2}} + C_2 e^{-\frac{t}{6}} = -\frac{C_1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{C_2}{2}e^{-\frac{t}{6}}$$

och den allmänna lösningen till systemet är:

$$\begin{cases} x(t) &= -\frac{C-1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{C_2}{2}e^{-\frac{t}{6}} \\ y(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{2}} + C_2 e^{-\frac{t}{6}} \end{cases}$$

Begynnelsevärdesproblem ger systemet:

$$\begin{cases} x_0 &= -\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2} \\ y_0 &= C_1 + C_2 \end{cases}$$

som har lösningen: $C_1 = \frac{y_0 - 2x_0}{2}$ och $C_2 = \frac{y_0 + 2x_0}{2}$. Lösningen till vårt problem är alltså:

$$\begin{cases} x(t) &= -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{4}\right)e^{-\frac{t}{2}} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{4}\right)e^{-\frac{t}{6}} \\ y(t) &= \left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{2}\right)e^{-\frac{t}{6}} \end{cases}$$