Dag 12. Substitution och areaberäkningar

Rekommenderade uppgifter

5.6.4 Bestäm $\displaystyle\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx.$

När vi ska förenkla en integral med hjälp av en substitution gäller det att kunna känna igen integranden som en uttryckskombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

där u är ett uttryck i x och f någon funktion.

I vår integral kan vi se att med $u=e^{2x}$ så är $u'=2e^{2x}$ och integranden kan skrivas

$$\tfrac{1}{2}\sin u\cdot u'.$$

Med substitutionen $u=e^{2x}$ får vi alltså

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx &= \{u=e^{2x};\ du=2e^{2x}\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \sin u\,du = -\tfrac{1}{2}\cos u + C = -\tfrac{1}{2}\cos(e^{2x})+C.\end{aligned}$$

5.6.6 Bestäm $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Låt oss skriva om integranden något,

$$2\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Här ser vi att den högra faktorn är derivatan av deluttrycket $\sqrt{x}$ som förekommer i den vänstra faktorn. Med substitutionen $u=\sqrt{x}$ kan alltså integranden skrivas

$$2\sin u\cdot u',$$

och integralen blir

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \{u=\sqrt{x};\ du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\}\\ &= 2\int\sin u\,du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

5.6.8 Bestäm $\displaystyle\int x^2 2^{x^3+1}\,dx.$

Vi skriver om integranden till

$$\tfrac{1}{3}\,2^{x^3+1}\cdot 3x^2.$$

Vi känner igen den högra faktorn $3x^2$ som derivatan av exponenten x^3+1.

$$\begin{aligned}\int x^2\,2^{x^3+1}\,dx &= \{u=x^3+1;\ du=3x^2\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{3}\int 2^u\,du = \frac{2^u}{3\,\log 2}+C = \frac{2^{x^3+1}}{3\,\log 2}+C.\end{aligned}$$

5.6.14 Bestäm $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx.$

Notera att $(x^2+2x+3)'=2x+2=2(x+1)$. Vi kan skriva om integranden som

$$\frac{1/2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,(x^2+2x+3)'.$$

Substitutionen $u=x^2+2x+3$ förenklar alltså integralen dramatiskt.

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx &= \{u=x^2+2x+3;\ du=2(x+1)\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u}+C = \sqrt{x^2+2x+3}+C.\end{aligned}$$

5.6.20 Bestäm $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Uttrycket inom rottecknet har derivatan $-2x$, och det är inte riktigt den faktorn vi har i täljaren. Men om vi delar upp integralen i två delar,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

så har den första integralen just den önskade derivatan i täljaren (sånär som på en faktor -2). Den första integralen blir

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \{u = 1-x^2;\ du = -2x\,dx\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Den andra integralen känner vi till den primitiva funktionen till.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

Alltså är

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

5.6.24 Bestäm $\displaystyle\int \sin^4 t\ \cos^5 t\,dt$.

Som integranden står är det inte lätt att se någon kombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

men om vi använder den trigonometriska ettan och skriver om uttrycket till

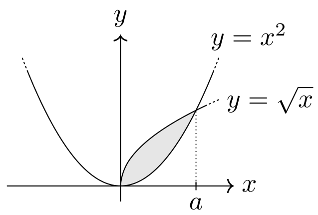
$$\sin^4 t \cdot (1-\sin^2 t)^2 \cdot \cos t$$

så ser vi att $u = \sin t$ är en lämplig substitution.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 t\ \cos^5 t\,dt &= \{u = \sin t;\ du = \cos t\,dt\}\\ &= \int u^4(1-u^2)^2\,du = \int (u^4 + u^8 - 2u^6)\,du\\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{9}u^9 - \tfrac{2}{7}u^7 + C = \tfrac{1}{5}\sin^5 t + \tfrac{1}{9}\sin^9 t - \tfrac{2}{7}\sin^7 t + C.\end{aligned}$$

5.7.2 Finn arean av området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

Vi ritar först upp kurvorna och området.



Vi ser att området begränsas ovanifrån av kurvan $y = \sqrt{x}$ och nertill av kurvan $y = x^2$. Områdets area blir därför

$$A = \int_0^a (\sqrt{x} - x^2)\,dx.$$

För att kunna räkna ut integralen behöver vi bestämma värdet på a som är x-koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$. Talet a ska alltså uppfylla ekvationen

$$\sqrt{a} = a^2. \qquad (*)$$

Vi kvadrerar,

$$a = a^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^3(a-1) = 0,$$

och ser att $a = 1$ är det sökta värdet. Eftersom vi kvadrerade $(*)$ och funktionen $x \mapsto x^2$ inte är en-entydig så måste vi förvissa oss om att $a = 1$ inte är en falsk rot. Stoppar vi in $a = 1$ i $(*)$ fås

$$\begin{aligned}\text{VL av } (*) &= \sqrt{1} = 1,\\ \text{HL av } (*) &= 1^2 = 1.\end{aligned}$$

Arean ges alltså av

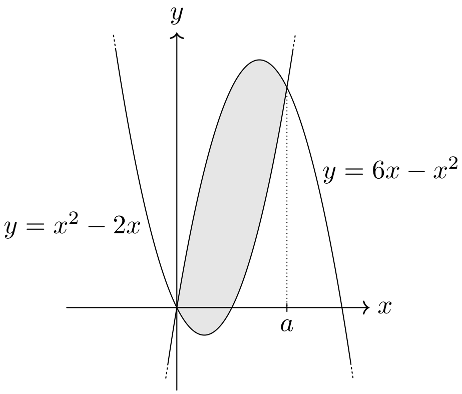
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

5.7.4 Finn arean av området som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = 6x - x^2$.

Vi ska först rita upp de två kurvorna och området de innesluter. Kvadratkomplettering ger

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \qquad (1)$$
$$y = 6x - x^2 = -(x-3)^2 + 9 \qquad (2)$$

Alltså har kurvan i (1) ett minimivärde -1 i punkten $x = 1$, och kurvan i (2) har ett maximivärde 9 i punkten $x = 3$. Båda kurvorna är dessutom parabler.



Området begränsas ovanifrån av kurvan $y = 6x - x^2$ och nertill av kurvan $y = x^2 - x$. Områdets area ges av integralen

$$\int_0^a \big(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)\, dx = \int_0^a (8x - 2x^2)\, dx,$$

där integrationsgränserna är skärningspunkterna mellan kurvorna. Punkten $x = a$ uppfyller därmed ekvationen

$$a^2 - 2a = 6a - a^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-4) = 0.$$

Alltså är $a = 4$.

Området area ges alltså av integralen

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\, dx = \left[4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 \right]_0^4 = 4 \cdot 16 - \tfrac{2}{3} \cdot 64 - (0 - 0) = 64/3.$$

5.7.6 Bestäm arean av området som begränsas av kurvorna $x - y = 7$ och $x = 2y^2 - y + 3$.

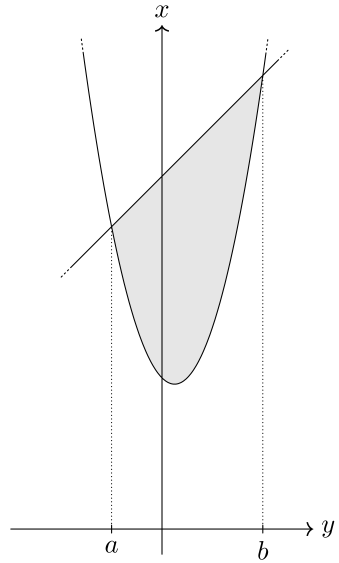
Den andra kurvan är uttryckt i formen

$$x = x(y).$$

Det är därför enklare att betrakta y-variabeln som den oberoende variabeln och x-variabeln som den beroende.

För att bestämma den andra kurvans form kvadratkompletterar vi

$$x = 2y^2 - y + 3 = 2(y - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{8} + 3$$
$$= 2(y - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{23}{8}.$$



Alltså har kurvan ett x-minimum $\frac{23}{8}$ i $y = \frac{1}{4}$ och är parabelformad.

Den första kurvan är en enkel rät linje

$$x = y - 7.$$

Arean ges av integralen

$$A = \int_a^b \big(y + 7 - (2y^2 - y + 3)\big)\, dy$$
$$= \int_a^b (-2y^2 + 2y + 4)\, dy.$$

Vi behöver bestämma skärningspunkterna $y = a$ och $y = b$. De är båda rötter till ekvationen

$$y + 7 = 2y^2 - y + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 - y - 2 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna $y = -1$ och $y = 2$. Alltså är $a = -1$ och $b = 2$.

Området area blir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (-2y^2 + 2y + 4)\,dy = \Big[-\tfrac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\Big]_{-1}^{2} \\ &= -\tfrac{2}{3}\cdot 8 + 4 + 8 - \big(\tfrac{2}{3} + 1 - 4\big) = 9. \end{aligned}$$

5.7.28 Bestäm arean av den slutna ögla som kurvan $y^2 = x^4(2+x)$ beskriver till vänster om origo.

Om vi betraktar kurvuttrycket

$$y^2 = x^4(2+x) \qquad (*)$$

kan vi notera att om punkten (x, y) ligger på kurvan så ligger även punkten $(x, -y)$ på kurvan. Kurvan är alltså symmetrisk kring x-axeln.

Vidare ser vi att om $x < -2$ så är HL är negativt och eftersom VL är en kvadrat kan inte $(*)$ vara uppfylld, d.v.s. det finns inga punkter till vänster om $x = -2$.

Från $(*)$ kan vi få två explicita uttryck för y,

$$y = \pm x^2\sqrt{x+2}. \qquad (\dagger)$$

Kurvan består alltså av grafen till de två funktionerna ovan. Från $(\dagger)$ ser vi också att ändpunkten $x = -2$ är en singulär punkt. I en omgivning av $x = -2$ har kurvan utseendet

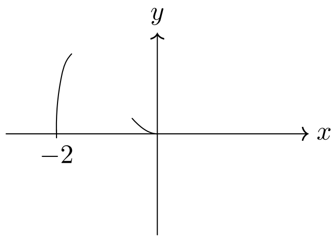
$$y = \pm x^2\sqrt{x+2} = \pm\big(4 + O(x+2)\big)\sqrt{x+2} = \pm 4\sqrt{x+2} + O(x+2)^{3/2}.$$

Kurvan har alltså en $\sqrt{\ }$-singularitet i $x = -2$. I grafens andra ändpunkt i $x = 0$ har kurvan utseendet

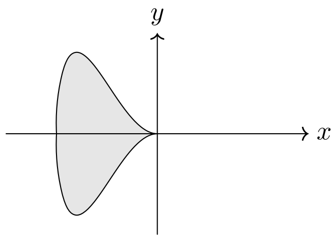
$$y = \pm x^2\sqrt{2+x} = \pm x^2\big(\sqrt{2} + O(x)\big) = \pm\sqrt{2}\,x^2 + O(x)^3,$$

alltså ett kvadratisk nollställe.

Om vi skisserar delarna av kurvan kring $x = -2$ och $x = 0$, och begränsar oss till positiva y-värden så får vi figuren nedan.



Det finns visserligen en extrempunkt mellan $x = -2$ och $x = 0$ (Rolles sats) men annars är grafen ganska ordinär däremellan. Fyller vi i mellanrummen i figuren ovan får vi ett ungefärligt utseende på området.



Arean ges av integralen

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} \big(x^2\sqrt{x+2} - (-x^2\sqrt{x+2})\big)\,dx = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\,dx \\ &= \{u = 2+x;\ du = dx\} = 2\int_{0}^{2} (u-2)^2\sqrt{u}\,du \\ &= 2\int_{0}^{2} (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2})\,du = 2\Big[\tfrac{2}{7}u^{7/2} - \tfrac{8}{5}u^{5/2} + \tfrac{8}{3}u^{3/2}\Big]_{0}^{2} \\ &= 2\Big(\tfrac{2}{7}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} - \tfrac{8}{5}\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} + \tfrac{8}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2} - (0 - 0 + 0)\Big) = \tfrac{256}{105}\sqrt{2}. \end{aligned}$$