Viktiga begrepp och resultat - elementär funktionslära.

- Talsystemen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Intervallbeteckningar, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$ osv.
- En funktion $f : A \to B$
  - är en regel som till varje element x i mängden A entydigt ordnar ett element $f(x)$ i mängden B.
  - har **definitionsmängden** $D_f = A$, (de element x sådana att $f(x)$ är definierad).
  - har **värdemängden** $V_f = \{f(x) : x \in D_f\} \subseteq B$.
  - har **grafen** $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$.
  - är **injektiv** om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in D_f$.
  - är **surjektiv** om $V_f = B$.
  - är **bijektiv** om f är både injektiv och surjektiv.
  - är **inverterbar** om ekvationen $f(x) = y$ har en entydig lösning för varje $y \in V_f$. Vi definierar då inversen enligt $f(t) = s \Leftrightarrow t = f^{-1}(s)$.
  - är **periodisk** med perioden T om det gäller att $f(x+T) = f(x)$ för alla $x \in D_f$.
  - är **uppåt begränsad** om det finns ett tal M sådant att $f(x) \leq M$ för varje $x \in D_f$
  - är **nedåt begränsad** om det finns ett tal M sådant att $f(x) \geq M$ för varje $x \in D_f$.
  - är **begränsad** om f är uppåt och nedåt begränsad. Då finns ett tal M sådant att $|f(x)| \leq M$ för varje $x \in D_f$.
  - är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för varje $x \in D_f$.
  - är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för varje $x \in D_f$.
  - är **växande** om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ för varje $x_1, x_2 \in D_f$.
  - är **strängt växande** om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in D_f$.
  - är **avtagande** om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in D_f$.
  - är **strängt avtagande** om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in D_f$.
- Sammansättningen $f \circ g$ av två funktioner f och g definieras av $f \circ g(x) = f(g(x))$. Definitionsmängden blir $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$.
- Absolutbeloppet

  $$|x| = \text{avståndet från } x \text{ till origo} = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

  Geometrisk tolkning: $|x-y|$ är avståndet mellan x och y.
- Räkneregler för absolutbeloppet. Om $x, y \in \mathbb{R}$ så gäller att

  i) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (Speciellt så följer att $|-x| = |x|$).

  ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

  iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Triangelolikheten)

  iv) $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$ (Omvända triangelolikheten)
- Kvadratkomplettering: $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$.

- Divisionsalgoritmen för polynom:

  Om $f(x)$ och $g(x)$ är polynom så finns entydigt bestämda polynom $q(x)$ (kvoten) och $r(x)$ (resten) sådana att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad 0 \leq \text{grad}(r) < \text{grad}(g).$$

- Faktorsatsen:

  Om $p(x)$ är ett polynom så gäller att

$$p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

  för något polynom $q(x)$, med grad(q) = grad$(p) - 1$.

- Av faktorsatsen följer bl.a. följande resultat: om andragradspolynomet $f(x) = ax^2 + bx + c$ har nollställena r_1 och r_2 så kan man faktorisera det enligt $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

- En *aritmetisk* talföljd har formen $a_n = a_1 + k(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$.
  Signifikativt är att $a_{n+1} - a_n = k$.

- En *geometrisk* talföljd har formen $a_n = a_1 k^{n-1}$, $n = 1, 2 \ldots$. Signifikativt är att $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$.

- En geometrisk summa har formen $\sum_{i=1}^{n} ax^{i-1}$ och om $x \neq 1$ så gäller det att

$$\sum_{i=1}^{n} ax^{i-1} = a\frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

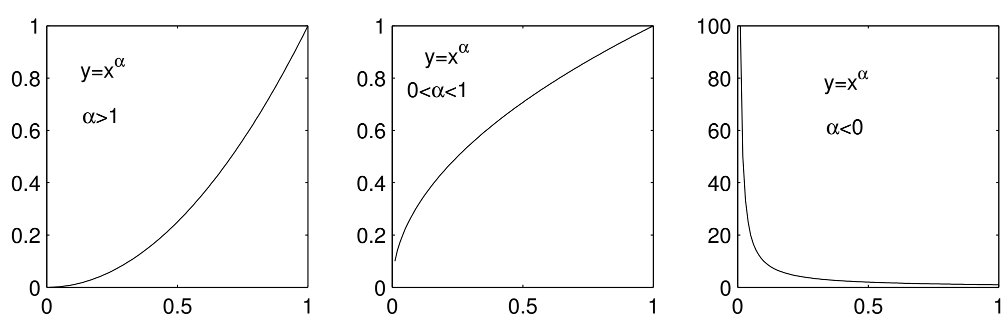
- En rationell funktion har formen $\frac{f(x)}{g(x)}$ där $f(x)$ och $g(x)$ är polynom.

- Räkneregler för potenser: om $a, b > 0$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ så gäller att

  i) $a^0 = 1$
  ii) $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$
  iii) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
  iv) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
  v) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$

- Potensfunktionen $f(x) = x^\alpha$ har i allmänhet definitionsmängden $]0, \infty[$, men för vissa $\alpha-$värden kan definitionsmängden utvidgas. T.ex. om $\alpha \in \mathbb{N}$ så är $f(x) = x^\alpha$ definierad på hela $\mathbb{R}$.

- Om $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) så är funktionen $f(x) = x^\alpha$ strängt växande (avtagande) på $]0, \infty[$.

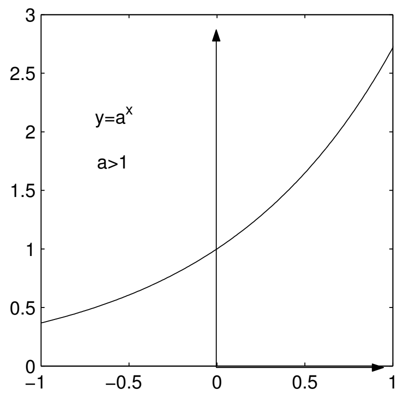


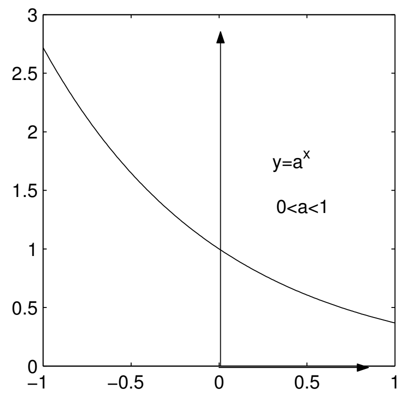
- Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ med bas $a > 0$ har definitionsmängden $\mathbb{R}$ och värdemängden $]0, \infty[$. Exponentialfunktionen är inverterbar och dess invers kallar vi för a-logaritmen, som betecknas $\log_a$ eller ${}^a\log$. Alltså gäller att

$$a^t = s \Leftrightarrow t = \log_a s.$$

  Enligt ovan så är $D_{\log_a} = (0, \infty)$, $V_{\log_a} = \mathbb{R}$.

- Om $a > 1$ ($a < 1$) så är funktionen $f(x) = a^x$ strängt växande (avtagande) på $\mathbb{R}$.





- Logaritmfunktionen $f(x) = \log_a x$ är (för $a > 1$) strängt växande på $]0, \infty[$.
- Räkneregler för logaritmer:

  i) $a^{\log_a x} = x$

  ii) $\log_a(a^x) = x$

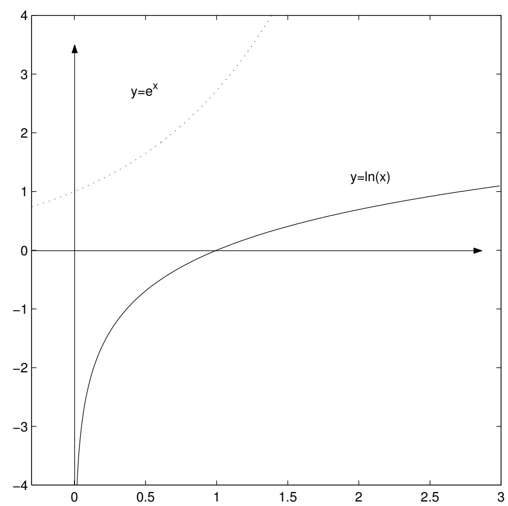
  iii) $\log_a 1 = 0$

  iv) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

  v) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

  vi) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

  Vanligtvis använder vi den naturliga basen $e = 2.7182\ldots$. Vi skriver $\log_e = \ln$ och det gäller att $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.



- Jämförelse mellan potensfunktioner, exponentialfunktioner och logaritmer: det gäller att

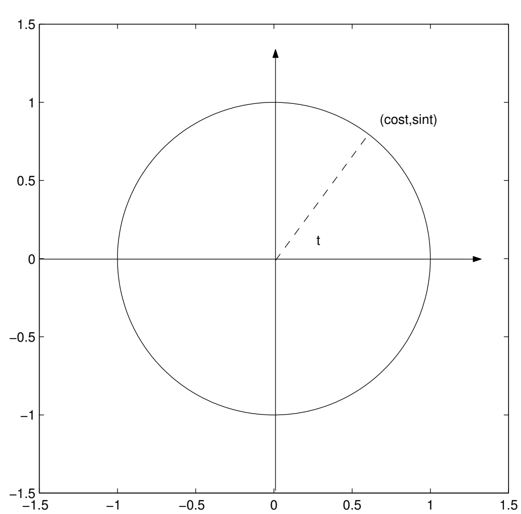
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \text{om } a > 1,$$

och

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \qquad \text{om } \alpha > 0, \text{ och } a > 1.$$

- De trigonometriska funktionerna

  $f(t) = \sin t$ och $g(t) = \cos t$ definieras av $(\sin t, \cos t) = P(t)$ där $P(t)$ för är den punkt på enhetscirkeln som svarar mot en cirkelbåge av längden $|t|$, mätt från punkten $(1, 0)$, med moturs som positiv riktning. Det följer direkt att $\sin(t + k2\pi) = \sin t$, $\cos(t + k2\pi) = \cos t$, $k \in \mathbb{Z}$.



- Funktionen $t \mapsto \tan t$ definieras av $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$.
- Några viktiga relationer:
  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

  $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos(x)$

  $\sin(\pi - x) = \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x)$

  $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$ $\qquad$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- Det gäller att
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
- Funktionen $f(x) = \arcsin x$ är inversen till restriktionen av funktionen $S(x) = \sin x$ till intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Alltså gäller att
$$y = \sin(x), \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \arcsin(y), \quad y \in [-1, 1].$$
- Funktionen $f(x) = \arccos x$ är inversen till restriktionen av funktionen $C(x) = \cos x$ till intervallet $[0, \pi]$. Alltså gäller att
$$y = \cos(x), \quad x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \arccos(y), \quad y \in [-1, 1].$$
- Funktionen $f(x) = \arctan x$ är inversen till restriktionen av funktionen $T(x) = \tan x$ till intervallet $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alltså gäller att
$$y = \tan(x), \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow x = \arctan(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$