

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i SF1625 för CDEPR
Fredagen den 30 oktober 2009, kl 09.00-10.00

Version **vänster**.
Inga hjälpmedel

Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

1. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^2 \cos(x - 2)$ i punkten med x -koordinat 2.

2. Sätt $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} + \arctan x + b$. Bestäm konstanten b sådana att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$.

3. En person i en roddbåt 2 km från den närmaste punkten på en rak strandlinje vill nå ett hus 6 km längre bort på stranden. Om personen kan ro 3 km/h och gå 5 km/h, bestäm den punkt där personen skall gå i land för att nå huset på kortast möjliga tid.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 1 i SF1625 för CDEPR
Fredagen den 30 oktober 2009, kl 09.00-10.00

Version **höger**.
Inga hjälpmedel

Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

1. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^2 \cos(x - 3)$ i punkten med x -koordinat 3.
2. Sätt $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} + \arctan x + a$. Bestäm konstanten a sådant att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.
3. En person i en roddbåt 3km från den närmaste punkten på en rak strandlinje vill nå ett hus 6 km längre bort på stranden. Om personen kan ro 4 km/h och gå 5 km/h, bestäm den punkt där personen skall gå i land för att nå huset på kortast möjliga tid.

Vänster

1. Tangentens ekvation är $y - b = f'(a)(x - a)$, där $a = 2$ och $b = 2^2 \cos(2 - 2) = 4$.

Med $f(x) = x^2 \cos(x - 2)$ fås $f'(x) = 2x \cos(x - 2) - x^2 \sin(x - 2)$ som ger $f'(2) = 4$.

Insättning i tangentens ekvation ger $y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$.

Svar: $y = 4x - 4$

2. Vi har $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} + \arctan x + b = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} + \arctan(0) + b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} + b = 4$

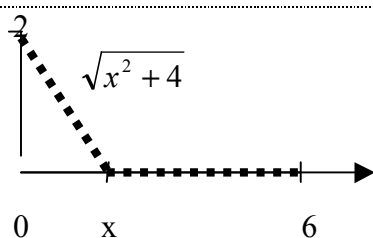
Vi vet se kursboken sats 14 sid 114 att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Vi får då att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[\frac{\sin 3x}{x} = 3 \frac{\sin 3x}{3x}, t = 3x \right] = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3.$$

Vi får $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} + b = 4 \Leftrightarrow 3 + b = 4 \Rightarrow b = 1$

Svar: $b = 1$

3.



a) Den totala tiden $T(x)$ ska minimeras: $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{6 - x}{5}$ då $0 \leq x \leq 6$.

$$T'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{6 - x}{5} \right) = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{5} = 0 \text{ ger } \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 4}$$

kvadrering ger $25x^2 - 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$. men $x \geq 0$. Enda lösning är $x = 1.5$ som ligger i

intervallet. Ger $x = 1.5$ ett minimum?

T ex derivationsteckenväxling ger

x	0		$3/2$		6
$T'(x)$		–	0	+	
$T(x)$	$\frac{28}{15}$	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{40}}{3}$

Detta ger svaret $x = 1.5$ km

Höger:

1. Tangentens ekvation är $y - b = f'(a)(x - a)$, där $a = 3$ och $b = 3^2 \cos(3 - 3) = 9$.

Med $f(x) = x^2 \cos(x - 3)$ fås $f'(x) = 2x \cos(x - 3) - x^2 \sin(x - 3)$ som ger $f'(3) = 6$.

Insättning i tangentens ekvation ger $y - 9 = 6(x - 3) \Leftrightarrow y = 6x - 9$.

Svar. $y = 6x - 9$.

2) Vi har $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} + \arctan x + a = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} + \arctan(0) + a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} + a = 3$

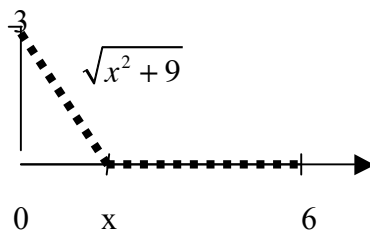
Vi vet se kursboken sats 14 sid 114 att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Vi får då att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{\sin 2x}{x} = 2 \frac{\sin 2x}{2x}, t = 2x \right] = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2.$$

Vi får $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} + a = 3 \Leftrightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$

Svar $a = 1$.

3.



a) Den totala tiden $T(x)$ ska minimeras: $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5}$ då $0 \leq x \leq 6$.

$$T'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5} \right) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} = 0 \text{ ger } \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x = 4\sqrt{x^2 + 9}$$

kvadrering ger $25x^2 - 16x^2 - 16 \cdot 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$. men $x \geq 0$. Enda lösning är $x = 4$ som ligger i intervallet. Ger $x = 4$ ett minimum?

T ex derivationsteckenväxling ger

x	0		4		6
$T'(x)$		-	0	+	
$T(x)$	$\frac{30}{20}$	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{45}}{4}$

Detta ger svaret $x = 4$ km