KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1625 för CEDPR
Fredag den 13 november 2009, kl 09.00-10.0

Version **vänster.**
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 2 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 2 som då inte behöver lösas. Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift x som då inte ska lösas..
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm arean av område $D=\left\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le \frac{x}{1+4x^2}\right\}$

2. En behållare full med en viss vätska har formen av den kropp som uppstår då det ändliga område

$$D=\left\{(x,y):2\le x\le 3, 0\le y\le \sqrt{\frac{1}{(x)(x-1)}}\right\}$$ roterar ett varv kring $x-$axeln.

I nedersta del av behållaren finns en kran som släpper ut vätskan med 1 volymenhet per sekund (v.e/s). Hur lång tid tar det att tömma ut behållaren?

3. En myra rör sig med en längd enhet per sekund på banan $f(x) = \int_1^x \sqrt{9t^2-1}\,dt$, $1\le x\le 2$.

Hur mycket tid behöver myran för att gå över hela banan.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1625 för CEDPR
Fredag den 13 november 2009, kl 09.00-10.0

Version **Höger.**
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 2 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 2 som då inte behöver lösas. Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift x som då inte ska lösas..
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm arean av område $D=\left\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le \dfrac{x}{1+2x^2}\right\}$.

2. En behållare full med en viss vätska har formen av den kropp som uppstår då det ändliga område

$D=\left\{(x,y):1\le x\le 2, 0\le y\le \sqrt{\dfrac{1}{(x)(x+1)}}\right\}$ roterar ett varv kring $x-$axeln.

I nedersta del av behållaren finns en kran som släpper ut vätskan med 1 volymenhet per sekund (v.e/s). Hur lång tid tar det att tömma ut behållaren?

3. En myra rör sig med en längd enhet per sekund på banan $f(x) = \int_1^x \sqrt{16t^2-1}\,dt$, $1\le x\le 2$.

Hur mycket tid behöver myran för att gå över hela banan.

Lösningsförslag till KS2 För CDEPR
Vänster

1. vi söker $\int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}dx = \begin{bmatrix} t = 1+4x^2 \\ dt = 8xdx \Leftrightarrow xdx = \frac{dt}{8} \\ x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x=1 \Leftrightarrow t=5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\int_1^5 \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\left[\ln t\right]_1^5 = \frac{\ln 5}{8}$.

Svar. $\frac{\ln 5}{5}$ ae

---

2. vi söker $\pi\int_2^3 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_2^3 \frac{1}{(x)(x-1)}dx$

Enligt partialbråks ansatsen har vi

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)} = \begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=1$$

och

$$\int_2^3 \frac{1}{(x)(x-1)}dx = \int_2^3 \frac{-1}{x}dx + \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx = \left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]_2^3 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 =$$

$$\ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

svar : $\pi \ln\frac{4}{3}$ (v.e/s).

3 . längden av banan ges av $L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$. Vet att $f(x) = \int_1^x \sqrt{9t^2-1}dt$, $1 \le x \le 2$.

Användning av analysens huvudsats (se sats 9 sid 296) ger att

$f'(x) = \sqrt{9x^2-1} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 = 9x^2-1$. Detta ger

att $L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1+9x^2-1}dx = \int_1^2 \sqrt{9x^2}dx = \int_1^2 3xdx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\cdot 2^2 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 = \frac{9}{2}$

Svar . Det tar 9/2 s för myran att gå över banan

Höger:

Vi söker $\int_0^1 \frac{x}{1+2x^2}dx = \begin{bmatrix} t = 1+2x^2 \\ dt = 4xdx \Leftrightarrow xdx = \dfrac{dt}{4} \\ x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x=1 \Leftrightarrow t=3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}[\ln t]_1^3 = \frac{\ln 3}{4}$

svar $\frac{\ln 3}{4} ae$

---

2. vi söker $\pi\int_1^2 (f(x))^2\,dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{(x)(x+1)}dx$

Enligt partialbråks ansatsen har vi

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)} = \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-1$$

och

$$\int_1^2 \frac{1}{(x)(x+1)}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 =$$

$$\ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

svar: $\pi \ln\frac{4}{3}$ (v.e/s).

2. I två grupper har smugit sig in ett fel . Men svarighetsgrader är likvärdiga

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)} = \begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=1$$

och

$$\int_1^2 \frac{1}{(x)(x-1)}dx = \int_1^2 \frac{-1}{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}dx = \left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]_1^2 = \ln\left(\frac{2-1}{1}\right) - \ln\left(\frac{1-1}{1}\right) = 0 - \lim_{x\to 0+}\ln(\varepsilon) = +\infty$$

Dvs det tar oändligt tid att tömma ut behållaren

3. längden av banan ges av $L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Vet att $f(x) = \int_1^x \sqrt{16t^2-1}\,dt$, $1 \le x \le 2$.

Användning av analysens huvudsats (se sats 9 sid 296) ger att

$f'(x) = \sqrt{16x^2-1} \Rightarrow (f'(x))^2 = 16x^2 - 1$. Detta ger

att $L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+16x^2-1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{16x^2}\,dx = \int_1^2 4x\,dx = \left[2x^2\right]_1^2 = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 1^2 = 6$

Svar: Det tar 6 s för myran att gå över banan
