KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1625 för CEDPR
Fredag den 4 december 2009, kl 08.45-10.00

Version **vänster.**
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 2 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 2 som då inte behöver lösas. Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift x som då inte ska lösas..
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. I en viss bakteriepopulation ändras antalet bakterier med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier. Proportionalitetskonstant är $k = \frac{\ln 3}{4}$. Antalet bakterier vid tiden noll är y_0.
   a) Ställ upp en differentialekvation för antalet bakterier vid tiden t och lös den . (2p)
   b) Hur lång tid tar det för bakterier att bli 27 gånger fler än begynnelseantalet y_0. (1p)

2. a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för funktionen
   $f(x) = e^{\sin x}$ kring punkten a = 0 . (2p)
   b) Använd resultat från a) till att beräkna ett approximativt värde av $e^{\sin(0.1)}$. (1p)
   (Approximationsfelet behöver inte anges)

3. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$. (3p)

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 2 i SF1625 för CEDPR
Fredag den 4 december 2009, kl 08.45-10.00

Version **Höger.**
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng
Kontrollskrivning 2 svarar mot uppgift 2 på tentamen. Den som får minst 5 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 3 poäng på tentamensuppgift 2 som då inte behöver lösas. Den som får minst 7 poäng på denna kontrollskrivning får automatiskt 4 poäng på tentamens uppgift x som då inte ska lösas..
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering
Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat. OBS!!Rätten att klaga på den rättade kontrollskrivningen upphör när denna lämnar undervisningslokalen.

1. I en viss bakteriepopulation ändras antalet bakterier med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier. Proportionalitetskonstant är $k = \dfrac{\ln 4}{3}$. Antalet bakterier vid tiden noll är y_0
   a) Ställ upp en differentialekvation för antalet bakterier vid tiden t och lös den . (2p)
   b) Hur lång tid tar det för bakterier att bli 27 gånger fler än begynnelseantalet y_0. (1p)

2 a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för funktionen
$f(x) = e^{\cos x}$ kring punkten a = 0 . (2p)
b) Använd resultatet från a) till att beräkna ett approximativt värde av $e^{\cos(0.1)}$. (1p)
(Approximationsfelet behöver inte anges)

3. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x^2}$. (3p)

Lösningsförslag till KS2 För CDEPR
Vänster

1. a) Kalla bakteriemängd $y(t)$ vid tiden t . Ändringen per tidsenhet vid tiden t är $\frac{dy}{dt}$. Den beskrivande begynnelsevärdes problem blir

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

med lösning $y(t) = y_0 e^{kt}$ som kan fås med minst 3 olika metoder
t ex genom att separera variablerna

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt \Rightarrow \ln y = kt + B \Rightarrow y = e^{B+kt} = \underbrace{e^B}_{C} e^{kt} = Ce^{kt}$$

Och $y(0) = y_0$, $k = \frac{\ln 3}{4}$ ger

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\ln 3}{4}t}$$

b) Tiden för att bakterier blir 27 gånger fler än begynnelseantalet ger
$y(t) = 27y_0 = y_0 e^{kt}$. Som ger $27 = e^{kt} \Rightarrow \ln 27 = kt \Rightarrow t = \frac{\ln 27}{k}$. Men $k = \frac{\ln 3}{4}$.

Vi till slut $t = \frac{4\ln 27}{\ln 3} = \frac{4\ln(3^3)}{\ln 3} = \frac{4 \cdot 3\ln 3}{\ln 3} == 12$

Svar $t = 12h$

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x) = e^{\sin x}$ kring punkten a = 0.
Det sökta Taylorpolynomet har formen $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$.

Vi får $f(x) = e^{\sin x}, f'(x) = e^{\sin x}\cos x, f''(x) = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right)$ som ger
$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1$.

$p(x) = 1 + x + x^2/2$ och ett approximativt värde av $e^{\sin(0.1)}$ är

$$p(0.1) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1 + 0.1 + 0.005 = 1.105$$

3. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

T ex L'Hôpitals regel ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x - 1 - x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x - 1\right)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Höger

a) Kalla bakteriemängd $y(t)$ vid tiden t. Ändringen per tidsenhet vid tiden t är $\frac{dy}{dt}$.

Den beskrivande begynnelsevärdes problem blir

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

med lösning $y(t) = y_0 e^{kt}$ $y(t) = y_0 e^{kt}$ som kan fås med minst 3 olika metoder:

T ex genom via karakteriska ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} - ky = 0 \text{ med karakteriska ekvationen } r - k = 0 \Rightarrow r = k \Rightarrow y(t) = Ce^{kt}$$

Och $y(0) = y_0$, $k = \frac{\ln 4}{3}$ ger $y(t) = y_0 e^{\frac{\ln 4}{3}t}$

b) Tiden för att bakterier blir 27 gånger fler än begynnelseantalet ger

$y(t) = 27y_0 = y_0 e^{kt}$. Som ger $27 = e^{kt} \Rightarrow \ln 27 = kt \Rightarrow t = \frac{\ln 27}{k}$. Men $k = \frac{\ln 4}{3}$.

Vi får till slut $t = \frac{3\ln 27}{\ln 4} = \frac{3\ln(3^3)}{\ln 4} = \frac{3 \cdot 3\ln 3}{\ln 4} = 9\frac{\ln 3}{\ln 4}$

Svar: $9\frac{\ln 3}{\ln 4}$ h

2. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden för funktionen $f(x) = e^{\cos x}$ kring punkten a = 0.

Det sökta Taylorpolynomet har formen $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$.

Fi får $f(x) = e^{\cos x}, f'(x) = e^{\cos x}(-\sin x), f''(x) = e^{\cos x}\left(\sin^2 x - \cos x\right)$ som ger

$f(0) = e, f'(0) = 0, f''(0) = -e$.

$p(x) = e(1 - x^2/2)$ och ett approximativt värde av $e^{\cos(0.1)}$ är

$$p(0.1) = e\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = e(1 - 0.005) = 0.995e$$

3. Beräkna valfritt $\lim_{x\to 0}\frac{1 + x - e^x}{x^2}$

T ex L'Hôpitals regel ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 + x - e^x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(1 + x - e^x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x + 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(-e^x + 1\right)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}$$