Feltyper på tentamenslösningar

– studier av lösningar till tre uppgifter från tentamen i matematik I vid KTH HT-04

av
Emma Enström, emmaencl@kth.se
Sara Isaksson, saracl@kth.se

Författarna är studenter på programmet *Cilvilingenjör och lärare* som ges av KTH och Lärarhögskolan i Stockholm.

Kurs: Vetenskap, teknik och lärande, 2D1605
Handledare: Mikael Cronhjort, KTH
Gunilla Olofsson, Lärarhögskolan
Inlämningsdatum: 2005-02-23

Sammanfattning

Den här rapporten är resultatet av en undersökning av vilka fel studenter gör vid tentamen av den första matematikkursen på civilingenjörsutbildningar vid Kungliga Tekniska Högskolan (KTH) i Stockholm. Undersökningen gjordes inom ett större projekt som KTH gör tillsammans med Lärarhögskolan i Stockholm. Rapporten är i första hand avsedd att förstås av personer med matematisk utbildning.

Utgångspunkten för felbeskrivningen har varit den tolkning av gymnasieskolans mål som gjorts vid *Enheten för beteendevetenskapliga mätningar* vid Umeå universitet[1]. En uppgift i taget, totalt tre stycken, har valts ut från en tentamen utifrån varierande *svårighetsgrad*, *kognitivt innehåll* och *likheter i kunskapsområde som testas*. Urvalsgrunderna utgjorde klassificeringen av uppgiften. De vanligaste felen har identifierats och klassificerats utifrån brister i de sex kompetenser som nämns i tolkningen av gymnasiemålen. Därefter har samtliga 153 tentamina granskats två gånger varvid felen varje tentand gjort tolkats och placerats in i lämplig felkategori.

Undersökningen är kvalitativ och huvudresultatet är beskrivningar av de vanligaste felen på respektive uppgift där en orsakstolkning ligger implicit i felkategoriseringen.

I samtliga undersökta uppgifter verkar vissa fel ha sin grund i studentens uppfattning av för uppgiften centrala begrepp som derivata, kontinuitet och absolutbelopp samt talbegreppet. Vanligt är också att studenterna inte sammanfattar och därmed ej redovisar vad de anser vara svaret på uppgiften. Detta anses här delvis förklaras av att det inte verkar ha ställts något sådant krav på studenterna. Andra kommunikativa fel är att påstå något utan att motivera det samt att använda matematisk notation på andra sätt än den är avsedd för. Detta verkar kunna göras både med och utan medvetenhet om vad som är sökt och om begreppen som notationerna står för. Exempel är att återanvända ett variabelnamn eller att derivera $|3x-2|$ till $|3|$. På alla uppgifter förekom beräkningsfel, som blev fler och grövre i den svåraste uppgiften.

Vissa uppgiftsspecifika fel har identifierats. De vanligaste är i uppgift 4 att studenter inte visar säkerhet avseende vad de olika parametrarna i olika formler står för och därmed blandar ihop dem. I uppgift 6 förbiser studenter absolutbeloppet helt och hållet eller missar att undersöka punkten i vilken uttrycket inom absolutbeloppstecken blir 0 när lokala extrempunkter söks och i uppgift 9 fanns många studenter som inte verkade betrakta derivatans definition som en ändringskvot, vilket ledde till att den användes felaktigt.

[1] Palm m.fl.: *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, PM nr 199, 2004, Umeå Universitet

Innehållsförteckning

SAMMANFATTNING **1**

INNEHÅLLSFÖRTECKNING **2**

INLEDNING **3**

BAKGRUND 3
SYFTE 3
AVGRÄNSNINGAR 3
TEORI OCH TIDIGARE STUDIER 3
METOD OCH URVAL AV MATERIAL 4

RESULTAT OCH ANALYS **6**

UPPGIFT 4 6
Beskrivning av uppgiften *6*
Felkategorier *6*
Resultat/Statistik *7*
Beskrivning av de vanligaste feltyperna *7*
Övriga kommentarer *8*
UPPGIFT 6 8
Beskrivning av uppgift *8*
Felkategorier *8*
Resultat/Statistik *9*
Beskrivning av de vanligaste feltyperna *9*
Övriga kommentarer *10*
UPPGIFT 9 11
Beskrivning av uppgift *11*
Felkategorier *11*
Resultat/Statistik *12*
Beskrivning av de vanligaste feltyperna *12*
Övriga kommentarer *13*

SLUTDISKUSSION **14**

ALGORITMER 14
BEGREPP 14
MATEMATISK KOMMUNIKATION 14
MODELLERING 15
RESONEMANG 15
PROBLEMLÖSNING 16
UTFORMNING AV UPPGIFT 16
VALIDITET OCH RELIABILITET 17
FÖRBÄTTRINGSFÖRSLAG 17

BILAGA 1: 6 MATEMATISKA KOMPETENSER **19**

BILAGA 2: LÖSNINGSFÖRSLAG **20**

Inledning

Bakgrund

Detta projekt är en del av ett större projekt som utförs i samarbete mellan Kungliga tekniska högskolan (KTH) och Lärarhögskolan i Stockholm. Projektet går ut på att jämföra gymnasieskolans mål med högskolans förkunskapskrav. Matematik-institutionen vid KTH önskar få bättre överblick över studenternas förkunskaper och hur dessa harmonierar med KTH:s förväntningar för att försäkra sig om att inget material hamnar ”mellan stolarna” vid övergången mellan gymnasiet och högskolan. Resultaten från denna studie kan om så önskas användas för att belysa detta.

Syfte

Syftet med det här projektet är att få en bild av vilka fel studenter gör på några uppgifter vid tentamen av den första matematikkursen på KTH:s civilingenjörsutbildningar. En bedömning av hur vanligt förekommande dessa fel är och vad i studentens matematikuppfattning som kan ha orsakat felen skall även göras. Arbetet skall kunna ligga till grund för fortsatt utredning om var i sin matematikutbildning studenterna kan förväntas ha mött och övat de begrepp och tekniker där de mest frekvent identifierade felen förekommer.

Avgränsningar

Ingen hänsyn har tagits till studentens ålder, kön eller etnicitet. Alla granskade tentamina är gjorda vid samma tillfälle av studenter som läst samma kurs, men tentamina från de studenter som i år läst kursen för första gången har inte skiljts ut från tentamina gjorda av dem som följt kursen tidigare år. Endast ett urval av uppgifterna på tentamen har granskats. Ingen statistik från studentens tidigare matematikutbildning har studerats, vare sig vad det gäller gymnasieform, kurs eller betyg. Rapporten vänder sig i första hand till lärare och studenter med matematisk utbildning. Inga matematiska begrepp eller metoder förklaras.

Teori och tidigare studier

Litteratur som behandlar matematikdiagnoser, matematikkompetenser och kategorisering av matematikuppgifter har använts som grund för arbetet. Det sistnämnda exemplifieras av ett arbetsunderlag från PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm[2]. Forskare vid *Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar* vid Umeå Universitet har fördjupat sig i gymnasiematematikens kursplaner[3]. Deras uppdelning av matematikkunskapen i algoritm-, begrepps-, resonemangs-, kommunikations-, problemlösnings- och modelleringskompetens har använts som grund för analys och kategorisering av de fel som studenterna gjort. Dessa sex kompetenser finns kortfattat beskrivna i bilaga 1.

Andra studier av övergångar mellan olika skolstadier har gjorts: vid Växjö Universitet studerades övergången mellan gymnasiet och högskolan av Edor Oscarsson[4], där introduktionskursen i matematik och studenternas resultat efter densamma

---

[2] Kjellström, Katarina: *Kategorisering av matematikuppgifter (Arbetsunderlag)*, PRIM-gruppen , Stockholm (stencil)

[3] Palm m.fl.: *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, PM nr 199, 2004, Umeå Universitet

[4] Oscarsson, Edor: *Övergången gymnasieskolan - högskolan* (A22)

undersöktes. Det projektet inkluderade uppgiftskonstruktionen och det fanns fasta svarsalternativ, vilket innebar möjlighet att på förhand bestämma vilka fel som skulle kunna göras och det innefattade därigenom även analys av orsakerna till felen. Resultaten presenteras statistiskt med lösningsfrekvens och kopplas till studentens betyg från den sist lästa gymnasiekursen i matematik.

PRIM-gruppen[5] undersökte i början av 1990-talet resultat på översiktsdiagnoser i matematik inför skolstarten på två- och treåriga gymnasielinjer. Dessa undersökningar inkluderade uppgiftskonstruktion och bedömning och resultatet redovisades statistiskt med lösningsfrekvenser uppdelat på flickor och pojkar. I de båda undersökningarna gavs en kort beskrivning av de vanligaste felen och dess orsaker.

Ett tidigare försök att analysera färdiga och redan skrivna prov i matematik har gjorts av Gunilla Ljung[6]. Den studien tar ett helhetsgrepp på gymnasiekursen i matematik i linjegymnasiet på 80-talet och jämför timplaner för olika moment med antalet uppgifter på proven samt redovisar könsseparerad statistik över lösningsfrekvenser. En klassificering av uppgifterna efter kognitivt innehåll görs. Denna klassificering kan betraktas som förlaga till de senare arbeten som gjorts, bland annat rapporten från Umeå universitet som nämnts tidigare.

Metod och urval av material

Denna undersökning är upplagd på ett annat sätt än Oscarssons och PRIM-gruppens, eftersom kursupplägg, uppgiftskonstruktion och bedömning/poängsättning var fastställda innan projektet startade. Därför valdes inte poängsättningen eller rättningsmallen från kursen vid KTH till utgångspunkt för felbeskrivning och för avgörandet av vilka fel som gjorts utan istället den tolkning av *gymnasieskolans* mål som gjorts i Umeå. Detta därför att den sistnämnda var mera analytisk till sin karaktär medan poängsättningen i större grad utgår ifrån *vad* studenten har klarat av än *varför/hur.*

Undersökningen omfattar 153 tentamina skrivna hösten 2004 av studenter på två civilingenjörsprogram. Kursen heter ”Matematik I” (5B1115) och omfattar sex poäng. Tentamina numrerades för att underlätta upprepade granskningar av samma lösning och fördelades sedan mellan de två deltagarna i projektet. En uppgift i taget valdes ut att studeras. Vid urvalet eftersträvades att ha med uppgifter av olika svårighetsgrad och delvis med olika kognitivt innehåll men med vissa likheter i kunskapsområdet som testades. Dock var urvalet till stor del grundat på en subjektiv bedömning av uppgifternas angelägenhet för projektet och för projektmedlemmarnas framtid som lärare och provkonstruktör. Urvalsgrunderna utgjorde också klassificering av uppgiften, som i likhet med i Gunilla Ljungs studie gjordes innan arbetet med att studera lösningar påbörjades. Därefter granskades ett 40-tal tentamina och noteringar gjordes om vad som hände i lösningsförsöken. De olika fel som upptäcktes sorterades efter Umeå-rapportens kompetenser, det vill säga den kompetens som huvudsakligen antogs omfatta det som studenten misslyckats med att göra utgjorde överkategori till feltypen. Detta var också den första analysen av vad felen berodde på, t.ex. att någon missförstått begreppet ”extrempunkt”. Givetvis skulle andra indelningar vara möjliga,

[5] Oscarsson, Ljung och Rosén; *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på treåriga gymnasielinjer*, Stockholm (1991)
[6] Ljung, Gunilla: *Centrala prov i matematik på NT-linjerna 1985-1989 – analys av innehåll och resultat,* PRIM-gruppen, Lärarhögskolan i Stockholm (1991)

men de är inte centrala för undersökningens huvudresultat som är beskrivningen av varje feltyp för sig. En sammanställning av felkategorierna och en tabell för de olika feltyperna gjordes och samtliga tentamina granskades utifrån detta. Tveksamma fall diskuterades och antalet fel av varje typ jämfördes för att säkerställa likvärdig bedömning. Felkategorierna blev i vissa fall för många eller för lika varandra och slogs då ihop. En del kategorier betraktas som arbetskategorier, t.ex. ”fullföljer inte”, och inte som en feltyp. Efter att alla tre uppgifterna granskats och felkategorierna justerats gjordes sedan en ytterligare genomgång av materialet, även detta i likhet med studien gjord av Gunilla Ljung. Den nya bedömningen visade god överensstämmelse med den gamla.

Som en följd av undersökningens upplägg valdes också andra redovisningsformer. Då bara tre uppgifter studerats och varken betygsstatistik eller könstillhörighet kommer att redovisas får lösningsfrekvensen en undanskymd roll. De resultat som presenteras blir antal studenter som gjort varje fel samt i likhet med Oscarsson, Ljung och Rosén i rapporter för PRIM-gruppen[7] beskrivning av dessa vanliga feltyper och möjliga förklaringar till dessa. Som huvudresultat bör beskrivningarna av vad felen består i betraktas. Denna fråga är intimt förknippad med varför felen gjorts eftersom det senare bygger på en tolkning av det första. Sedan kan svaret sökas på frågan om felen härstammar från KTH:s kurs eller inte.

Studien är främst att betrakta som kvalitativ på grund av att det centrala i studien är konstruktion av felkategorier med en följande bedömning till vilken kategori ett fel i en viss uppgiftslösning hör.[8] Subjektiviteten ligger dock inte på individnivå eftersom ett relativt stort antal tentamina, 153 stycken, har undersökts. Detta antal gör att bedömningen av frekvensen för respektive fels förekomst ändå är relevant för dem som önskar få reda på vad det är vanligt eller ovanligt att studenter gör fel på.

[7] Ljung, Oscarsson, Rosén; Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på treåriga gy mnasielinjer, Stockholm (1991)
[8] Wallén, G; Vetenskapsteori och forskningsmetodik, (1996), Studentlitteratur

Resultat och analys

De fel som gjordes på varje uppgift identifierades oberoende av de andra uppgifternas fel. Dock återkom vissa kategorier. Dessa är i redovisningen namngivna med versaler medan de uppgiftsspecifika felkategorierna betecknas med gemener. För samtliga underkategorier gäller att de inte enbart handlar om den kompetens som de listas under. Vid intresse för specifikt matematiskt stoff som renderar fel t.ex. alla fel som berör derivata är det upp till läsaren att koppla ihop de feltyper som är relevanta i sammanhanget. Detsamma kan gälla större sammanslagningar av exempelvis kommunikation och notation. Lösningsförslag till uppgifterna nedan bifogas i bilaga 2.

Uppgift 4

> *Hur många riskorn behövs för att på ett schackbrädes 64 rutor lägga 1 riskorn på brädets första ruta, 2 på dessa andra, 4 på dess tredje och så vidare, genom att varje gång dubbla antalet från föregående ruta, till och med dess 64:e och sista ruta.* *(3 p)*

Beskrivning av uppgiften

Uppgiften inkluderades i denna studie med önskan om att granska studenternas modelleringskompetens. En skriven text ska transformeras till ett matematiskt språk för att sedan generera ett skrivet svar. Detta kräver även kommunikativ och resonerande förmåga, dels för att förstå vad som frågas efter, samt att kunna förklara vad som räknats ut och hur. I själva verket visade sig uppgiften handla mer om att identifiera, behärska algoritmen för och till viss del innebörden av begreppet geometrisk summa.

141 studenter av de 153 som skrivit tentamen har behandlat uppgiften och 58 av dessa har fått full poäng. Då felkategorierna nedan även inbegriper typer av fel som inte ger poängavdrag kan även dessa 58 tentander finnas representerade i statistiken.

Felkategorier

1. Algoritm/Modellering

A) Studenten gör beräkningsfel.
B) Studenten inleder uppgiftslösningen men fullföljer inte, i vissa fall med hänvisning till att formeln glömts bort.
a) Studenten sätter upp serien korrekt, men använder sedan fel n i formeln. *n* för antal termer och *n* för sista potensen förväxlas och används i fel variant av formeln.
b) Studenten sätter sista termen i serien till 2^{64} och får därigenom ibland fel på *n* i formeln.
c) Studenten identifierar serien fel och använder fel formel, exempelvis väljer aritmetisk summa.
d) Studenten använder rätt formel, men använder ett felaktigt parametervärde exempelvis kvoten k=1/2.
e) Studenten identifierar inte serien som geometrisk och hittar ingen modell, vilket kan leda till långa uträkningar och fel svar.

2. Begrepp

a) Studenten visar osäkerhet om innebörden av talbegreppet. Exempel på detta är att exakta svar avrundas till ett närmevärde.

3. Kommunikation

A) Studenten använder felaktiga notationer, av exempelvis likhetstecken eller summatecken. Samma bokstav används för olika parametrar.
B) Studenten lämnar svar utan motivering.
C) Studenten lämnar inget svar som visar slutsatsen av beräkningarna.

Resultat/Statistik

1 A	1 B	1 a	1 b	1 c	1 d	1 e	2 a	3 A	3 B	3C
7	7	18	26	12	10	9	15	23	4	25

Beskrivning av de vanligaste feltyperna

Formeln för geometrisk summa kan se ut på två olika sätt, med den skillnaden att bokstaven n kan beteckna antingen antalet termer i serien eller utgöra den sista potensen som förekommer. Ett felaktigt värde på n i formeln har genererat flest fel i uppgiften och sammanfattas i felkategori 1a och 1b. Lösningarna i 1 a karaktäriseras av att studenten satt upp serien korrekt, med rätt antal termer, men sedan inte haft fullt klart för sig vad parametrarna i formeln står för. I de lösningar som innehåller fel av typen 1b har studenten satt upp en felaktig serie eller ingen alls och sedan kombinerat parametern n och formel felaktigt. Ironiskt nog kan två av dessa fel ta ut varandra och ge rätt svar, vilket även förekommit bland lösningarna. Felkategori 1a och 1b kan tolkas som att studenten använder en formel utan att egentligen veta vad den står för.

Kategori 3A, i vilken 23 lösningar hamnar, innefattar fel i notation vilket i vissa fall kan bero på ofullständig begreppsförståelse. Exempel på vanliga fel här är att studenten använder summatecknet med felaktig ”kringnotation”($\sum_{k=2}^{n=64} k^n$). Andra felaktiga notationer är att samma bokstav används för olika parametrar. Exempel på detta är att bokstaven n får beteckna både sista potensen och antal termer i serien och bokstaven k återfinns både som variabel i summauttrycket och konstant i formeln. I vissa fall leder detta till fel. Återanvändning av variabelnamn beror troligen på att studenten är van vid konventionen *n* för heltal i olika formler. Studenten tänker då inte på att det är olika heltal som åsyftas och reflekterar inte över den oklarhet som uppstår eller är inte ens medveten om möjligheten att använda en annan bokstav.

En osäkerhet angående talbegreppet har märkts i denna uppgift. 15 studenter har problem som rör hur svaret 2^{64}-1 skall presenteras. Vissa studenter avrundar detta till ett närmevärde (2^{63}-1 $\approx$ 2^{63}) och vissa försöker räkna ut svaret med hjälp av

multiplikationsuppställningar, som inte leder någon vart. Ytterligare exempel på detta är omarbetning av svaret (2^{64}-1) till (16^{16} – 1) som innebär onödiga räkningar. 2^{64}-1 betraktas tydligen inte som ett svar, och osäkerhet råder om vilken typ av svar som krävs.

Övriga kommentarer

Mycket skiftande kvalitet på lösningarna har kunnat urskiljas. Vissa tentander motiverar varför serien är geometrisk, härleder formeln och sammanfattar sina beräkningar klart och tydligt, medan andra stoppar in siffror i formeln utan att motivera varifrån de kommer och varför man får göra detta.

Om uppgiften inte hade föregåtts av undervisning om geometriska summor hade den givit ett annat utslag i bedömningen av studentens modelleringskompetens. Även efter denna kurs tar dock vissa av tentanderna fram en egen modell för att lösa uppgiften, med mer eller mindre lyckat resultat.

Uppgift 6

Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x) = x^2 - |3x-2|. \qquad (4\ p)$$

Beskrivning av uppgift

Uppgiften valdes ut eftersom den behandlar grundläggande funktionsanalys, vilket gymnasiet behandlar i både C- och D-kurs. Till typen är uppgiften standardmässig, med undantag för absolutbeloppet i funktionen. Absolutbelopp ingår inte i den behörighetsgivande Matematik D, så detta begrepp antogs vara nytt för studenterna, vilket gjorde att uppgiftens svårighetsgrad sattes till medelsvår.[9] De kompetenser uppgiften antogs visa var algoritmkompetens, begreppskompetens och kommunikativ kompetens.[10] Förståelse av begreppen extrempunkt och absolutbelopp är nödvändiga för lösande av uppgiften, liksom behärskning av algoritmer för att hitta en funktions extrempunkter samt för att avgöra vilken karaktär de har.

139 studenter har behandlat uppgiften. Vid genomgång av tentamina insågs att uppgiften genererade relativt likartade fel. Uppgiften innehåller ett antal svåra moment, vilka endast två studenter lyckades hantera på ett sådant sätt att full poäng erhölls.

Felkategorier

1. Algoritm

A) Studenten gör beräkningsfel exempelvis vid hantering av parenteser m.m.
a) Studenten använder felaktiga deriveringsregler.

---

[9] Kjellström, Katarina: *Kategorisering av matematikuppgifter (Arbetsunderlag)*, PRIM-gruppen , Stockholm (stencil)
[10] Palm m. fl.; *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, Umeå Universitet. Pm nr 199, (2004)

b) Studenten visar inte kännedom om algoritm för att hitta maximi- och minimipunkt.
c) Studenten visar inte kännedom om algoritm för att avgöra vad som är maximi- och vad som är minimipunkt.

2. Begrepp

A) Studenten ger uttryck för missuppfattning av begrepp såsom derivata, kontinuitet, extrempunkt, randpunkt, globala och lokala extrempunkter.
a) Studenten visar inte förståelse för begreppet absolutbelopp. Exempel på fel är att absolutbeloppet behandlas som en parentes och således tas bort, vilket leder till att endast en punkt hittas.
b) Studenten visar viss insikt om betydelsen av begreppet absolutbelopp. Exempel på fel är att uttrycket innanför absolutbeloppstecknet antas byta tecken i $x = 0$.
c) Studenten behandlar de två fallen för absolutbeloppet korrekt, men visar inte förståelse för hur en funktion innehållande absolutbelopp ser ut grafiskt. Följden av detta blir att funktionens ”spets” inte hittas. Ibland bifogas ifrågasättande argumentation om det omöjliga i förekomsten av enbart två minimipunkter på kurvan.

3. Kommunikation/Resonemang

A) Studenten använder felaktiga notationer. Exempel på detta är att notationen för absolutbelopp används fel, $|3|$.
B) Studenten lämnar svar utan motivering. Exempelvis anges extrempunkter utan att beräkning eller resonemang som lett fram till slutsatsen på något sätt visas eller svar grundas på påståenden och antaganden utan matematisk grund.
C) Studenten lämnar inget svar som visar slutsatsen av beräkningarna.
a) Studenten visar inte med höger- och vänstergränsvärden för derivatan eller på annat tydligt sätt att punkten där derivatan inte är definierad är en maximipunkt.

Resultat/Statistik

1 A	1 a	1 b	1 c	2 A	2 a	2 b	2 c	3 A	3 B	3 C	3 a
29	5	25	23	20	63	19	38	28	21	22	14

Beskrivning av de vanligaste feltyperna

Det i särklass vanligaste felet, nummer 2a, görs av 63 studenter. Felet beskrivs som att studenten inte visar förståelse för innebörden av absolutbelopp och i merparten av fallen leder denna brist till att beloppstecknet behandlas som en vanlig parentes som utan vidare kan tas bort. Funktionen får då ett mer välbekant utseende och därefter kan uppgiften lösas genom att funktionens derivata sätts till noll och endast en av de tre extrempunkterna hittas.

Fel 2c gjorde 38 studenter. Dessa lösningar karaktäriseras av endast två punkter hittas. Studenten behandlar absolutbeloppet korrekt och hittar kurvans båda minimipunkter, men kan inte utifrån detta tolka funktionens grafiska utseende vilket leder till att funktionens ”spets” (punkten där uttrycket inom absolutbeloppet är lika med noll) inte hittas. Vissa studenter inser det omöjliga i att de två enda extrempunkterna på denna funktion skulle vara minimipunkter och försöker därför på olika sätt resonera kring detta, exempelvis genom att rita en graf där den ena av kurvans minimipunkter i matematisk bemärkelse är en terrasspunkt (se bilaga). Denna lösningsmodell kan även generera fel 3B som innefattar alla omotiverade påståenden. En lösning på problemet med två minipunkter på kurvan visade sig vara att tentanden till synes godtyckligt utser en punkt mellan de två övriga till maximipunkt.

Det tredje vanligaste felet är feltyp 1A. De flesta studenter här har misslyckats med att räkna ut funktionsvärdet i extrempunkterna. Fel 3A vilket hittats 28 gånger, är mer intressant och innefattar de studenter som på något sätt använder inkorrekt matematisk notation. I denna uppgift är det vanligaste exemplet på felaktig notation att funktionen efter derivering ser ut som $f'(x) = 2x - |3|$. Detta leder i vissa fall till att studenten tolkar uttrycket på så sätt att beloppstecknet kan tas bort eftersom 3 alltid är positivt, medan andra hållit reda på att det fortfarande finns två fall att ta hänsyn till och således fått ut rätt svar. Frågan här är om studenterna förstår absolutbeloppets natur till fullo eller bara vet att det betyder ”två fall”, eftersom den felaktiga notationen i vissa fall betyder detta.

Övriga kommentarer

Feltyp 1b, vilken 25 studenter hamnat i, kan betraktas som allvarlig. Här har studenten på olika sätt tydligt misslyckats med att undersöka funktionens extrempunkter. Felaktiga metoder som använts är exempelvis lösning av andragradsekvationen och angivande av funktionens nollställen som extrempunkter eller genom värdetabell över alla heltal inom ett visst intervall med efterföljande val av punkter med högsta och lägsta hittade y-värden som extrempunkter. I feltyp 1c, som beskriver lösningar där studenten inte behärskar algoritmer för att avgöra karaktären hos extrempunkten, har 23 studenter hamnat. Anmärkningsvärt angående kopplingen mellan kategori 1b och 1c är att studenter i flera fall misslyckats med att hitta någon punkt, feltyp 1b, och sedan med hjälp av andraderivatan korrekt angett denna icke identifierade punkt till minimipunkt. Ovanstående kan tolkas som att kunskapen i grundläggande funktionsanalys är fragmentarisk hos ett antal studenter.

Felkategori 3a innehåller de lösningar där studenten hittat och karaktäriserat funktionens tre korrekta extrempunkter men inte förklarat tillräckligt tydligt varför ”spetsen” är just en maximipunkt. Vissa studenter resonerar väl och verkar övertygade om att detta skall räcka, medan examinatorn verkar förvänta sig matematisk argumentation i form av höger- och vänstergränsvärden.

Att studenten inte till fullo förstår begreppen nämnda i felkategori 2A kan märkas på flera sätt. Exempel på detta är att studenten ritat funktionen även med maximipunkten, men inte angett denna punkt som en extrempunkt. Ett annat exempel är att studenten försökt föra ett matematiskt resonemang kring funktionsanalys och därigenom kommit med felaktiga påståenden. 20 studenter har visat bristande förståelse för något av begreppen.

Uppgift 9

Vad är derivatan av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{då} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{då} \quad x = 1 \end{cases}$$

i punkten x = 1 och x ≠ 1. Använd derivatans definition! *(4 p)*

Beskrivning av uppgift

Uppgiften valdes för att återknyta till derivata- och funktionshanteringen som testats i uppgift 6. Detta bedömdes vara en teoretisk uppgift som prövade begreppsförståelse, algoritmkompetens och resonemangskompetens. Uppgiften bedömdes vidare som svår. Djupgående förståelse krävs för hur begreppet ”definierad” för en funktion hänger samman med funktionens graf och hur derivatans definition hänger samman med de två fallen, $x=1$ och $x \neq 1$. Vidare krävdes förståelse för villkor för kontinuitet och deriverbarhet. Även förståelse för konsekvenserna av dessa villkor i detta specifika sammanhang krävs. Själva deriveringen eller hanteringen av derivatans definition är av rutinkaraktär medan mera insikt krävs för att hantera fallet $x=1$. Detta skulle även kunna benämnas problemlösningskompetens. 131 av 153 studenter försökte sig på uppgiften. Tre studenter hade fått full poäng.

Felkategorier

1. Algoritm

A_1) Studenten gör grova beräkningsfel: deriverar fel eller gör grova räknefel. Studenten utför till exempel divisionen 0/0, för ihop bråk med olika nämnare eller hävdar att täljare och nämnare får deriveras separat och sedan sättas ihop.

A_2) Studenten gör ”enklare” beräkningsfel, som till exempel 1-1-3-3= -8. eller trasslar in sig i långa beräkningar vilket leder till att studenten ger upp, att termer tappas bort eller till teckenfel i svaret.

B) Studenten inleder uppgiftslösningen men fullföljer inte.

a) Studenten använder/utvecklar/tolkar derivatans definition felaktigt. Exempel här är att l´Hospital regel används eller att *(3-3)/h*, (*3+h-3)/h* eller andra olämpliga värden sätts in. Ingen medvetenhet om derivatans definition som ändringskvot visas.

b) Studenten tillämpar deriveringsregler på $f(x)=3$ i punkten $x=1$ och får derivatan 0.

c) Studenten förenklar ej kvot ”färdigt”. Detta orsakas ibland av förbisedd möjlighet att förkorta uttrycket med (x-1).

2. Begrepp

A) Studenten ger uttryck för missuppfattning av begrepp som t.ex. deriverbar, kontinuerlig och av sambanden dem emellan. Exempelvis påstår studenten att funktionen inte är kontinuerlig i $x=1$ och därför inte deriverbar där eller att eftersom kontinuerlig inte implicerar deriverbar så finns det ingen derivata.

3. Kommunikation/Resonemang

A) Studenten använder felaktiga notationer, är exempelvis inte konsekvent med limes eller skriver $x^3-1/x-1$ istället för $(x^3-1)/(x-1)$.

B) Studenten lämdar svar utan motivering, till exempel visas ingen beräkning.

C) Studenten gör beräkningar men meddelar inte vad han/hon anser vara svaret på uppgiften.

a) Studenten skriver upp en felaktig version av derivatans definition, till exempel med inkonsekvent val av ”första och andra punkt” i ändringskvoten, $(f(x)-f(x+h))/h$ eller $(f(x)*h-f(x))/h$.

b) Studenten lämnar inte tillräcklig motivering till att $f(x)\equiv x^2+x+1$ för alla x.

c) Studenten håller inte isär de två olika fallen för derivatan. Exempel på detta är att studenten glömmer att leta efter derivata i $x=1$ eller i $x\neq 1$ eller misstolkar frågan och löser fel uppgift.

d) Studenten ger uttryck för felaktiga påståenden/antaganden (ej begreppen) och /eller visar osäkerhet över vad som är bevisat.

e) Studenten använder derivatans definition för att räkna ut derivatan då $x\neq 1$, vilket inte felaktigt, men onödigt. (”Använd derivatans definition” tolkas troligen som en order som gäller all derivering som ska utföras.)

Resultat/Statistik

$1A_1$	$1A_2$	1B	1a	1b	1c	2A	3A	3B	3C	3a	3b	3c	3d	3e
30	30	23	41	15	(31)	19	34	5	30	11	34	24	4	(93)

Kommentar: Resultat inom parentes utgör oegentliga fel.

Beskrivning av de vanligaste feltyperna

Kategorin 1a, till vilken 41 lösningsförslag sällar sig, karaktäriseras av förvirring kring att $f(x)$ och $f(x+h)$ ser ut att bli likadana för funktionen $f(1)=3$, som betraktas som en konstant funktion. Den förvirringen hanteras ibland genom att lägga till ett h eller genom argumentation om att derivatan ska vara noll i punkten då funktionen inte är definierad där. Studenter som gör detta fel verkar inte ha reflekterat över derivatans definition som en krympande ändringskvot. Därmed har de inte klart för sig vad man kan och inte kan göra med denna. Många verkar inte tänka på att det är *två* punkter som sätts in i ändringskvoten. Detta fel antas alltså till stor del bero på studentens begreppsförståelse, även om det i den första, konkreta formen visar på avsaknad av algoritmer för att hantera problemtypen. Tilläggas bör att felet 1b också vilar på liknande grunder, och görs ännu mera naivt eftersom ingen tanke på deriverbarhet verkar ha föresvävat studenterna.

De 34 personer som gjort felet 3b (motiverar inte att $f(x)\equiv x\text{^}2+x+1\ \forall x$) har som regel fått detta kommenterat vid rättningen. Felet består i att inte ha redovisat tillräckligt mycket. Här är det troligt att många studenter övertygat sig själva om att uttrycket gäller för alla x utan att ha visat det matematiskt. Detta skulle gå att betrakta som ett rent kommunikativt problem – studenterna uttrycker sig inte tillräckligt tydligt. Det har dock andra dimensioner också där kärnfrågan är vad studenterna skall förstå av sig själva i sammanhanget. Det är också sannolikt att det inte bara rör sig om förståelse av vilket sätt att kommunicera som är lämpligt utan också om förståelse för

matematikens natur. Att avgöra att den ”nya” funktionen efter förkortning med (*x-1*) är definierad för *x=1* genom att kontrollera att *f(1)=3* och sedan vara nöjd, skulle kunna göras naivt och vara en riskabel grund för fortsatt matematik. En generaliserad version av denna metod är att gå från det specifika till det generella utan bevisning.

34 studenter hade olika typer av felaktiga notationer i sina lösningar, kategori 3A. I detta fall var det till exempel vanligt att vara inkonsekvent med limes-beteckningen. Vid rättningen hade beteckningen skrivits ut där den saknades på många ställen i följd. En del studenter använde limes-beteckningen som vänsterled och övriga delen av derivatans definition som högerled i en ekvation:

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ... = 2x + 1,$$

en likhet som inte gäller. Det går inte att utifrån detta yttra sig om vad studenter som skriver så har för uppfattning om derivatans definition och varför de noterar som de gör. De mindre vanliga felen i denna kategori var att slarva med parenteser eller att ”dubbelboka” en variabel till flera betydelser.

I vardera av kategorierna $1A_1$ och $1A_2$ hamnade 30 studenter. Till grova räknefel sorterades främst algebraiska fel och egna deriveringsregler. Matematiken blir godtycklig om förbjudna åtgärder och situationsanpassade regler används. Detta sker inte enbart på grund av brister i beräkningsalgoritmen utan har också en djupare begreppslig dimension. *Varför* får man inte dela med 0, *varför* gäller en formel osv. Till enklare räknefel hör de vid lösningsförsöken av denna uppgift mycket vanliga ”onödiga felen” – tecken och termer försvinner för att uträkningarna blivit för långa, raden ovanför skrivs av felaktigt, och rent aritmetiska fel. Detta kan bero stress över att uppgiften var svårare än de föregående och på att det blivit för många samtidiga procedurer att hålla reda på.

Övriga kommentarer

”Felkategorin” 1c har funnits med som arbetskategori, men saknar i stort sett intresse. Många studenter har inte upptäckt möjligheten att förkorta uttrycket och kommer då fram till ett svar som de inte heller kan förkorta. Räkningarna blir mycket långa om man inte dividerar bort (*x-1*).

Kategorierna 3C och 3e renderar ingen anmärkning vid rättningen. 3e är ingen ”riktig” felkategori - man kan göra så och göra rätt. En stor andel av dem som försökt lösa uppgiften har använt derivatans definition ”i onödan” (dvs för att hitta derivatan till *f(x) då* $x \neq 1$)[11]. Studenterna betraktar då uppgiften som något slags standarduppgift i likhet med sådana som funnits i många gymnasieböcker i matematik istället för att reflektera över varför derivatans definition skulle behöva användas i det här fallet.

[11] Detta har troligen att göra med uppgiftsformuleringen. Det är lätt att uppfatta användandet av derivatans definition som ett krav – att det inte tolkas så i denna studie beror på att alla som har fått fram rätt derivata med kvotregeln har fått samma poäng som dem som använt derivatans definition.

Slutdiskussion

Studenterna har inte fått möjlighet att genom de tre här undersökta uppgifterna utförligt visa alla kompetenser de behärskar. Undersökningen säger ingenting om vad studenterna kan utan beskriver, som tidigare nämnts, endast de fel de gör. Genomgående för undersökningen är att inga uttalanden kan göras om vilka förmågor studenterna bör ha uppnått efter genomgången kurs eller hur stor chans de haft att öva sina matematiska färdigheter vare sig på KTH eller under tidigare studier. För att bedöma användbarheten av denna studie krävs kunskap om ovanstående, vilken finns tillgänglig hos personer på KTH och lärarhögskolan. Vad materialet kommer att användas till är upp till dessa personer att avgöra.

Algoritmer

De fel som i denna undersökning berör algoritmer kännetecknas av fragmentarisk hantering av algoritmerna. Studenter kan veta hur man avgör om en punkt är max- eller minpunkt men inte vara säkra på hur punkten hittas. Deriveringsregler kan kommas ihåg delvis men användas på olämpliga sätt. Vad som kan och bör förenklas inses inte alltid. Algoritmer för lösning av andra typer av problem kan blandas in och förvirra både studenten som skrivit dem och den som läser lösningen. Ju krångligare algoritm, desto fler fel begås.

Begrepp

Det har inte varit ett krav för att få poäng på tentamen att beskriva begrepp. Kategorin 2A utgörs alltså bara av studenternas spontana påkallanden av uppmärksamhet på den egna uppfattningen om olika begrepp. Fel som syns är att studenter inte har klart för sig betydelsen av *kontinuerlig, definierad* och *deriverbar*. Det är möjligt att fler av studenterna har samma uppfattning än de som skriver något om den. I Umeå-rapporten[12] påpekas att det för att skapa en riktig bild av elevers begreppsuppfattning är nödvändigt att pröva uppfattningen ur många olika infallsvinklar och alltså med många uppgifter. I denna undersökning har inte enskilda KTH-studenters begreppsuppfattning analyserats ingående. Det är dock värt att påpeka att detta är en svårbedömd kategori. Samtidigt ger de mycket värdefull information åt examinatorn som annars skulle vara oåtkomlig. Genom att börja beskriva begreppen som en uppgift behandlar avslöjar studenten mycket mer om sin egen förståelse för matematiken än vid algoritmisk lösning. Detta kan kortsiktigt ”skada” studenten. Orimligheter i studentens resonemang som annars inte skulle ha avslöjats ger poängavdrag. På längre sikt torde dock studentens lärande underlättas av att ha fått sådana missuppfattningar belysta och kommenterade.

Matematisk kommunikation

Att kommunikationen blivit en sådan stor del av denna undersökning beror på att utgångspunkten för felklassificeringen lade större tyngd vid kommunikation än vad tentamen som granskats verkade göra samt på ställningstagandet att kommunikation är viktig. Anser läsaren att kommunikation i form av sammanfattning av lösningen är oviktig kommer denna del av resultatet ej att användas.

---

[12] Palm m. fl.; *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, Umeå Universitet. Pm nr 199, (2004) sidan 13

I tentamenssituationen ingår matematisk kommunikation på flera sätt. Tentanden ska läsa uppgiftsformuleringen och göra klart för sig vad som är givet och vad som söks. Hur det sökta skall redovisas anges sällan i anslutning till uppgiften men tentamen brukar vara försedd med instruktioner om utförlig lösning och motivering. Det är en bedömningsfråga om studenten följt denna uppmaning. Utförlighet och motivering orsakar sällan anmärkningar vid rättningen och här talas därför om en överenskommelse mellan studenterna och examinatorn om kravnivån. Överenskommelsen behöver inte vara formell eller ens uttalad. Den kan härröra från föreläsningar, övningar, kontrollskrivningar och gamla tentamina lika väl som ifrån uttalade preferenser från examinatorn. Självklart är det så att de fel som kommenteras i denna undersökning beträffande studenternas sätt att kommunicera i sina lösningar kanske inte skulle ha funnits i andra sammanhang. Därför går det inte att säga att studenternas kommunikativa kompetens är låg bara för att de inte lämnar svar eller för att de inte skriver mer än nödvändigt. Det verkar snarare vara hänsyn till överenskommelsen än hänsyn till vad uppgiften kräver som studenterna visar.

De kommunikationsfel som i övrigt återfunnits är av allvarligare art. Ibland lämnas svar på helt fel fråga. Bristande förtrogenhet med matematisk notation leder ofta till olämpliga åtgärder, exempelvis notationer som betyder andra saker än vad studenten menar/använder dem för. I alla lägen då felaktiga notationer görs finns utrymme för minst två fortsättningar: att studenten, fullt medveten om vad som ska göras fullföljer lösningen utan att göra fel eller att studenten blir lurad av sin egen notation till att göra fel i nästa led. Det händer även att studenter skriver så otydligt att de läser fel i sina egna anteckningar. Liknande fel uppstår då strukturen i lösningen är otydlig.

I de tre uppgifterna avstår 18 %, 16 % respektive 23 % av studenterna från att tydliggöra vad de anser är svaret på uppgiften – den generella felkategorin 3C. Arbetet med det här projektet leder till slutsatsen att bedömningsarbetet då försvåras avsevärt. Det blir föremål för gissning och spekulationer vad studenten tror sig ha räknat ut. För studenten kräver formulering av ett svar dessutom att lösningen måste gås igenom, vilket kan leda till att fel upptäcks och ny förståelse nås. Missuppfattning av frågan skulle också kunna undvikas.

Många av felkategorierna under rubriken kommunikation skulle kanske någon vilja avfärda som futtigheter med motiveringen att innehåll är viktigare än form, en i sammanhang då kunskaper skall bedömas kanske inte ovanlig inställning. Här har bedömningen gjorts att felen hindrar studenten från att kommunicera matematik på ett för andra begripligt sätt.

Modellering

Modelleringskompetensen var inte central för lösningen av någon dessa uppgifter annat än i avseendet att *använda* en matematisk modell för ett verkligt problem (uppgift 4). Några studenter visade ändå tydligt sin förmåga till modellering, men brister i denna kompetens bedöms endast ha orsakat ett fåtal fel.

Resonemang

Resonemangskompetens testas inte explicit i någon av de tre uppgifter som undersökts, men var ett krav för att fullständigt lösa uppgift 6 och 9. Genomgående i alla uppgifter verkar dock resonemang saknas i fråga om vad som behöver göras i uppgiften. Att inleda uppgiftslösning genom att föra resonemang med sig själv för att

få en överblick över uppgiften och hitta de genvägar som finns är nödvändigt för att kunna lösa svårare matematiska problem. Exempel på detta är att en stor del av studenterna i uppgift 9 förbisett att polynomdivision kraftigt underlättar fortsatta beräkningar. En osäkerhet i fråga om matematikens natur och vad som behöver bevisas och inte kan skönjas. I uppgift 4 resonerar ett antal studenter kring varför serien är geometrisk och ett fåtal bevisar formeln, medan andra anser att det räcker att sätta in värden i en postulerad formel utan att tala om varför detta är möjligt. När uppgifterna blir mer komplexa, som uppgift 9 i detta fall prövas studenternas förmåga till matematiskt resonemang tydligt. Brister i resonemangskompetens kan ha att göra med luckor i begreppsförståelse, svag kännedom om algoritmer för att bevisa exempelvis gränsvärden eller helt enkelt osäkerhet i fråga om matematikens natur. En missuppfattning mellan examinator och tentand gällande hur ett påstående bevisas har synts i både uppgift 6 och 9. I uppgift 6 har studenter med ord och bild försökt resonera i varför extrempunkten i $x=2/3$ är en maximipunkt, medan examinatorn förväntade sig ett mer matematiskt resonemang. Samma sak gäller för motiveringen till att derivatan i punkten $x=1$ är 3 i uppgift 9. I vissa fall verkar studenten haft bilden av funktionen klar för sig i huvudet och med ord försökt beskriva denna istället för att som examinatorn önskade resonera rent matematiskt genom att använda derivatans definition.

Problemlösning

Vid problemlösning måste studenten själv välja vilka verktyg som behöver användas ur ”den matematiska verktygslådan”. Av de undersökta uppgifterna är det kanske främst uppgift 9 som saknar en bestämd lösningsväg, men även uppgift 4 och 6 borde ha krävt ett aktivt val av en viss algoritm. Då vetskap saknas om vilka typer av uppgifter studenterna mött under kursen är det dock svårt att avgöra ifall uppgift 4 och 6 faktiskt krävde någon form av problemlösningskompetens[13] eller endast uppfattades som typuppgifter med givet lösningsmönster. Många av de lösningar där uppgifterna inte behandlats på det matematiskt mest effektiva sättet ger intrycket av att studenten räknat litet på måfå för att se vad som händer. Exempel på detta är i uppgift 6 när andragradsekvationen i funktionsuttrycket har lösts och i uppgift 9 när tre metoder för att visa kontinuitet och två metoder för att räkna ut derivata har använts. Detta skapar mycket onödiga räkningar och i lösningen av uppgift 9 då svar ej lämnats ordentligt även en form av gardering där personen som rättat tentamen kan välja att identifiera vad i lösningen som är rätt vilket ger poäng samt vad som är fel vilket stryks ut. I arbetet med teknologstudenternas uppgiftslösningar har det synts tydligt vilka studenter som haft överblick över och behärskat de delar av den matematiska verktygslådan som krävdes här.

Utformning av uppgift

Uppgifterna har ibland bäddat för missförstånd genom valda siffervärden. I uppgift 6 är extrempunkterna ±3/2 och 2/3, vilket orsakat att studenter som förstått innebörden av absolutbelopp svarat med endast två punkter fast de egentligen hittat tre. Liknande problem uppstod i uppgift 9 eftersom funktionens och derivatans värde i $x=1$ båda var 3. Detta gör att vissa av felen snarare beror på misstag än missförstånd.

[13] Palm m. fl.; *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, Umeå Universitet. Pm nr 199, (2004)

Validitet och reliabilitet

De indelningar i felkategorier och tolkningar av lösningar som gjorts skulle med all säkerhet inte ha sett exakt likadana ut om andra personer analyserat dessa uppgifter. Subjektiviteten varierar dock mellan olika felkategorier. I de fall där felen varit klart definierade, som att i uppgift 6 behandla absolutbeloppstecknet som en parentes kan resultatet användas mer konkret än i de fall då kategorin består av exempelvis olika former av beräkningsfel.

Undersökningens resultat hade varit säkrare och kunnat säga mer om studentens allmänna matematiska kompetens ifall kategorierna varit samma för alla uppgifter. Nu gjordes kategoriseringen av varje uppgift oberoende av felkategorierna för övriga uppgifter.

En av rapportens felkällor är att olika bedömning av vilken feltyp en viss lösning motsvarade kan ha skett eftersom de två projektmedlemmarna inte granskade varandras tentamina. En annan möjlig felkälla är att själva insorteringen av lösningar i kategorierna kan innehålla enstaka fel. Detta är dock inte avgörande då studien är kvalitativ och storleksordningen för varje feltyp är mer intressant än det exakta antalet.

Det externa bortfallet i den här studien utgörs av dem som varit registrerade på kursen men inte skrev tentamen, vilket enligt institutionens lista var 81 personer. Siffran är sannolikt lägre om det är personer som följt kursen som skall ingå eftersom många av de 81 personerna kan ha slutat på kursen/utbildningen. Gruppen som valt bort att skriva tentamen har troligen som vanligaste skäl att de inte ansett sig ha haft tid eller lyckats med att lära sig innehållet i kursen tillräckligt väl. Det är därmed inte en helt slumpmässig grupp. Det interna bortfallet redovisas för varje studerad uppgift. Även här är antagligen skälen till bortfallet liknande.

Förbättringsförslag

När den här typen av material studeras är det egentligen av intresse att känna till hur långt studenterna kommit i sina lösningsförsök. Då behövs ingen kategori som heter ”fullföljer inte” och färre kommentarer behöver medfölja tabellens kryss. Istället kunde det vara lämpligt att använda tre kategorier på varje ”feltyp”: studenten visar att han/hon kan, visar att han/hon inte kan eller visar inte om han/hon kan.

Det kan också vara lämpligt att tänka på framtida jämförelser mellan olika uppgifter vid bestämning och namngivning av kategorier – att göra detta i efterhand tar tid och kraft och kan dessutom leda till missar. Till exempel är det lämpligt att sådana fel som är möjliga att göra på alla uppgifter räknas upp först och har samma beteckningar och att ha så få uppgiftsspecifika feltyper som möjligt. Då blir jämförelser intressantare.

Referenslista

Litteratur:

Kjellström, Katarina: *Kategorisering av matematikuppgifter (Arbetsunderlag)*, PRIM-gruppen , Stockholm (stencil)

Ljung, Oscarsson, Rosén; *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på treåriga gymnasielinjer,* Stockholm (1991)

Ljung, Oscarsson, Rosén; *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på tvååriga gymnasielinjer,* Stockholm (1990)

Ljung, Gunilla; *Centrala prov i matematik på NT-linjerna 1985-1989 - analys av innehåll och resultat*, PRIM-gruppen, Stockholm (1991)

Palm m. fl.; *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, Umeå Universitet. Pm nr 199, (2004)

Oscarsson Edor; *Övergången gymnasium-universitet, Universitetslärarnas syn på gymnasiematematiken*, samt material från examensarbeten vid Växjö universitet

Persson Arne; *Analys i en variabel*, Studentlitteratur, Lund (1990)

Wallén, Göran; *Vetenskapsteori och forskningsmetodik*, Studentlitteratur, Lund (1993, 1996)

Bilaga 1: 6 Matematiska kompetenser[14]

Problemlösningskompetens innebär att eleven skall kunna lösa en uppgift utan att en färdig inlärd lösningsväg tillämpas.

Algoritmkompetens betyder att eleven behärskar ett antal matematiska standardprocedurer. Dessa kan bestå av ett eller flera steg och innefattar till exempel algebraiska färdigheter och formelhantering. Algoritmkompetens är ofta en förutsättning för problemlösningskompetens och modelleringskompetens.

I *begreppskompetens* är det centrala kännedom om definitionen av matematiska begrepp. Begrepp skall även kunna användas aktivt av eleven. Begreppskompetens är en förutsättning för förståelse av matematikämnets karaktär och uppbyggnad.

Modelleringskompetens innebär att eleven utifrån ett verkligt icke matematiskt formulerat problem kan skapa en matematisk modell och därefter hitta en lösning, vilkens rimlighet sedan ska bedömas.

Resonemangskompetens definieras av förmåga att argumentera på ämnesteoretiska grunder, såsom logisk slutledning och matematiska regler. Eleverna skall här kunna analysera, bevisa, utvärdera, generalisera och förklara utifrån ett korrekt matematiskt tänkande. Kritisk granskning av påståenden innefattas även.

Kommunikationskompetens betecknar elevens förmåga att muntligt och skriftligt ta emot och ge matematisk information. Den matematiska terminologi som krävs för meningsfull kommunikation bygger på begreppsförståelse samt kännedom om korrekt matematisk notation.

[14] Palm m. fl.; *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, Umeå Universitet. Pm nr 199, (2004)

Bilaga 2: Lösningsförslag

Uppgift 4

Sökt: Totalt antal riskorn på schackbrädets 64 rutor om man lägger ett på den första rutan, två på den andra, fyra på den tredje o.s.v.

$$\sum_{n=1}^{64} 2^{n-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63}$$

Geometrisk summa med kvoten k=2, antal termer n=64 och första termen a_0=1, beräknas med formeln:

$$a_0 \frac{1-k^n}{1-k} \Longrightarrow \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

<u>Svar</u>: Antal riskorn på schackbrädet blir 2^{64}-1.

6 LÖSNINGSFÖRSLAG

SÖKT: Alla extrempunkter till funktionen

$$f(x) = x^2 - |3x-2|$$

LÖSN:

$$f(x) = x^2 - |3x-2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{då } x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 + 3x - 2 & \text{då } x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$x > \frac{2}{3}$ $\quad f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$f''(x) = 2 \Rightarrow$ minimipunkt

$x < \frac{2}{3}$ $\quad f(x) = x^2 + 3x - 2$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

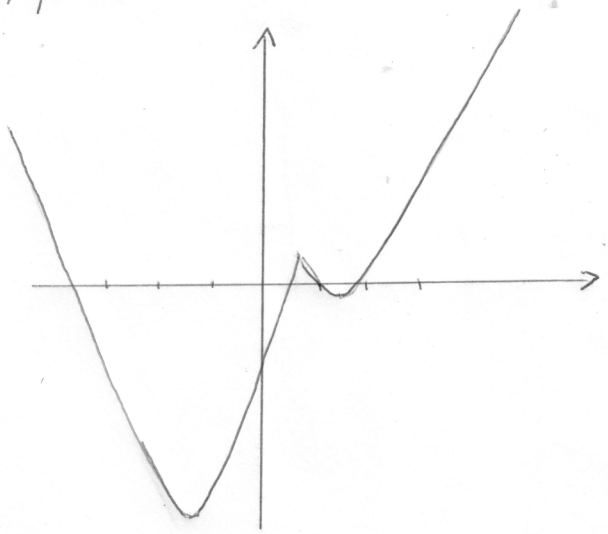
$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{17}{4}$

$f''(x) = 2 \Rightarrow$ minimipunkt

Absolutbeloppet ger en spets i $x = 2/3$, där funktionen inte är deriverbar. Punkten borde vara en maxpunkt. Undersöker:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \nearrow 2/3} f'(x) = \frac{4}{3} + 3 > 0 \\ \lim\limits_{x \searrow 2/3} f'(x) = \frac{4}{3} - 3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ är en maximipunkt. } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

6. forts.



<u>Svar:</u> Funktionen har 3 extrempunkter, minpunkter i $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ och $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4}\right)$ och en maxpunkt i $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$.

9 LÖSNINGSFÖRSLAG

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$$

Undersöker funktionen då $x \to 1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ∴ funktionen är kontinuerlig för alla x

$x \neq 1$: $f(x) = x^2+x+1$

$f'(x) = 2x+1$

$x = 1$: Derivatans definition: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+(1+h)+1-3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2+1+h+1-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0} h+3 = 3$$

<u>Svar</u>: $f'(x) = 2x+1$ då $x \neq 1$

$f'(x) = 3$ då $x = 1$