Förel NR 8. MEDELVÄRDESATSEN och dess tillämpningar

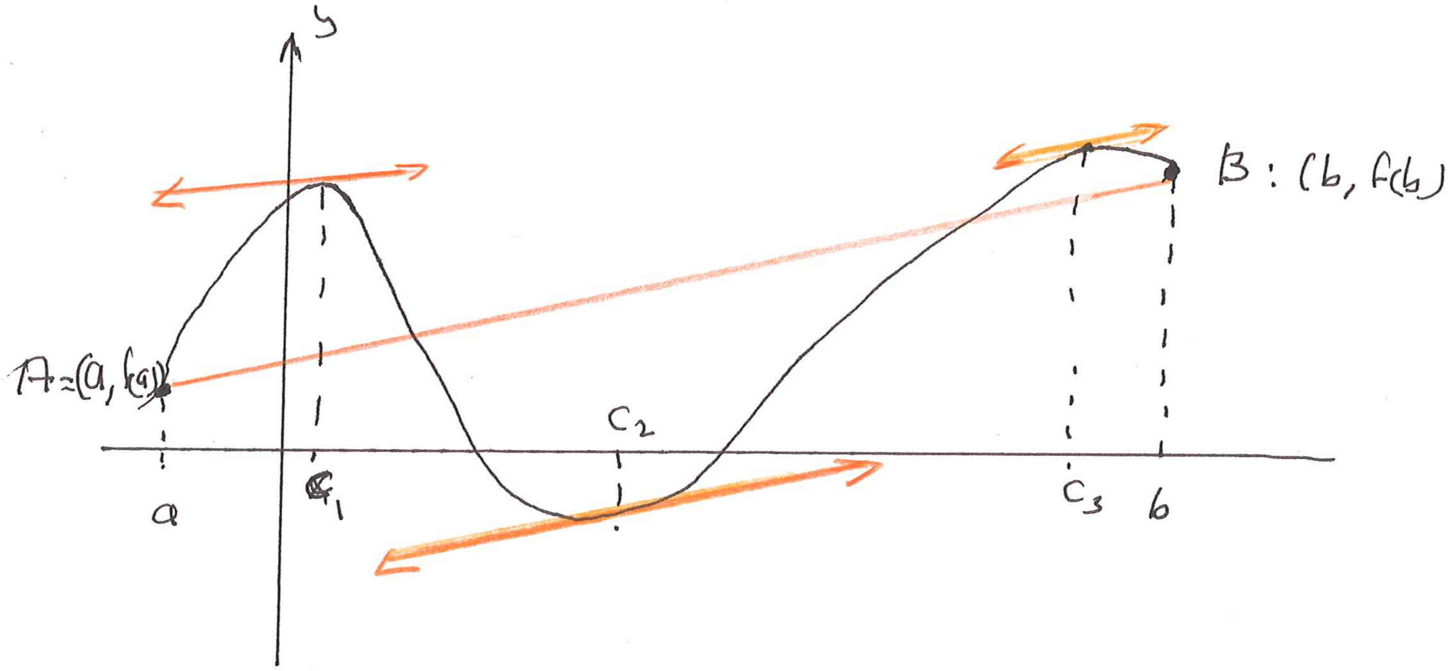
Medelvärdessatsen (MVS) (se sid 202)

Förutsättning 1. f kontinuerlig på $a \le x \le b$ $([a, b])$

2. $f'(x) = \frac{df}{dx}$ finns på $a < x < b$ (a, b)

Påstående. DET finns ett tal c $(a < c < b)$ så att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$



Lutningen till Korda $\overline{AB}$ är $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

= Lutningen till tangenten i $x = c$

(Här c_1, c_2 och c_3)

SATSEN handlar om uppskattning av Differens mellan $f(a)$ och $f(b)$ dvs

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c), \quad a < c < b$$

SATSEN ANVÄNDS ofta på formen

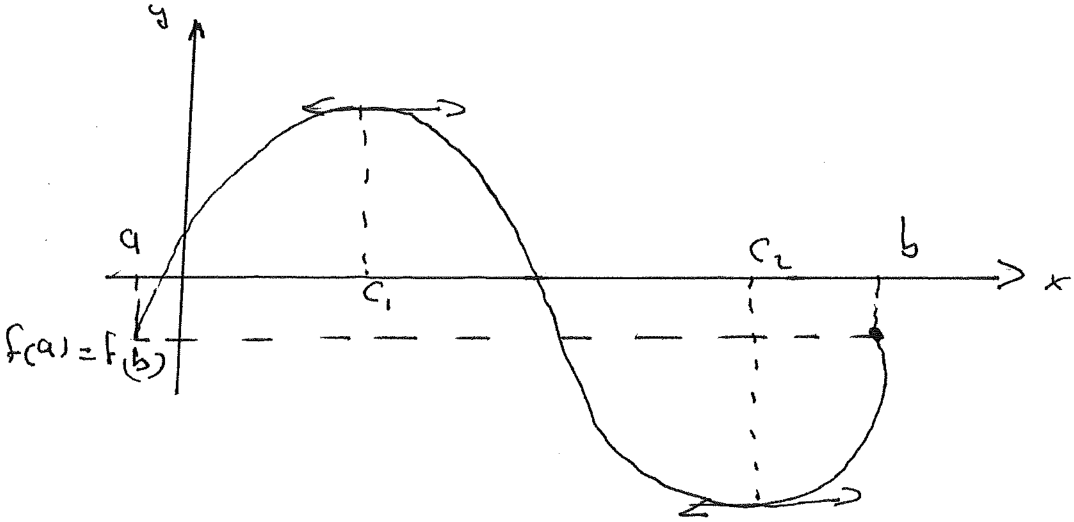
$$\boxed{f(x) - f(a) = \underbrace{(x - a)}_{>0}\, f'(c), \quad a < c < x < b}$$

Tillämpning 1

av

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} \, f'(c), \qquad a < c < b$$

har vi om $f(a) = f(b) \implies f'(c) = 0$

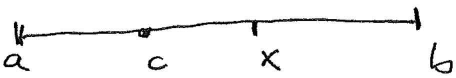


DVS om $f(a) = f(b)$ så ha $f'(x)$ minst ett nollställe

Tillämpning 2

Om $f'(x) = 0$, $a < x < b$ så följer att $f(x) =$ konstant $a \leq x \leq b$

Ty för x godt. Medelvärdessatsen på



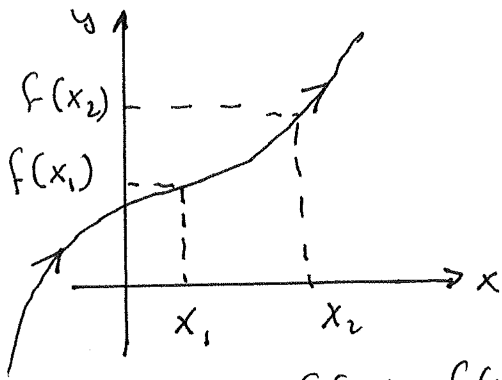
formen: $f(x) - f(a) = (x-a) \, f'(c)$ ger

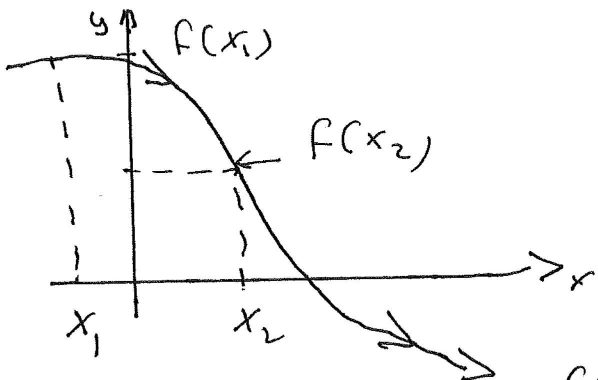
om $f'(c) = 0 \implies f(x) = f(a) =$ konstant $x \in [a, b]$

DVS Om derivatan är noll på ett intervall så följer att funktionen är konstant.

OM MONOTONA FUNKTIONER

Def. Funktionen f säges vara monoton i intervallet $(a,b) \Leftrightarrow (a < x < b)$ om
f är antigen växande på (a,b)
eller avtagande — " —



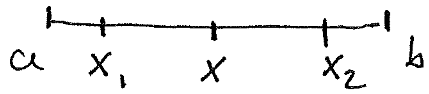


$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
strängt växande)
(f har en invens)

$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
strängt avtagande
(f har eninvers)

Medelvärdessatsen

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} f'(x)$$



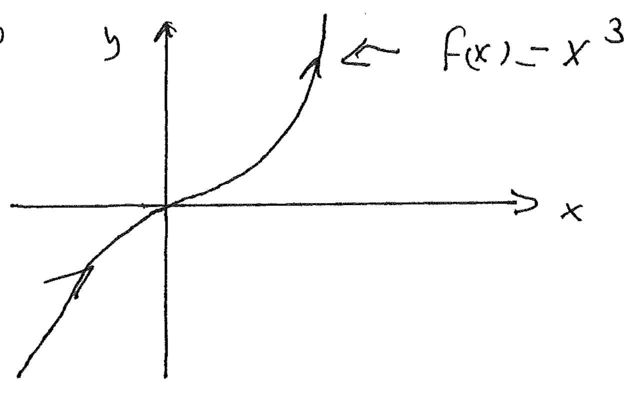
ger

I. $f'(x) \geq 0 \iff f$ är växande på (a,b)
$f'(x) \leq 0 \iff f$ är avtagande på (a,b)

II $f'(x) > 0 \implies f$ är strängt växande på (a,b)
$f'(x) < 0 \implies f$ är strängt avtagande på (a,b)

Obs! om f är strängt växande på (a,b)
$\not\Longrightarrow f'(x) > 0$

Ty $f(x) = x^3$ är strängt växande
men $f'(x) = 3x^2 \geq 0$



Ex undersök för vilka x är funktionen
$f(x) = 2x - \ln(1+3x^2)$ strängt växande
(har en invers!)

Lösning Medelvärdessatsen säger att om
$f'(x) > 0 \implies f$ strängt växande
Vi har

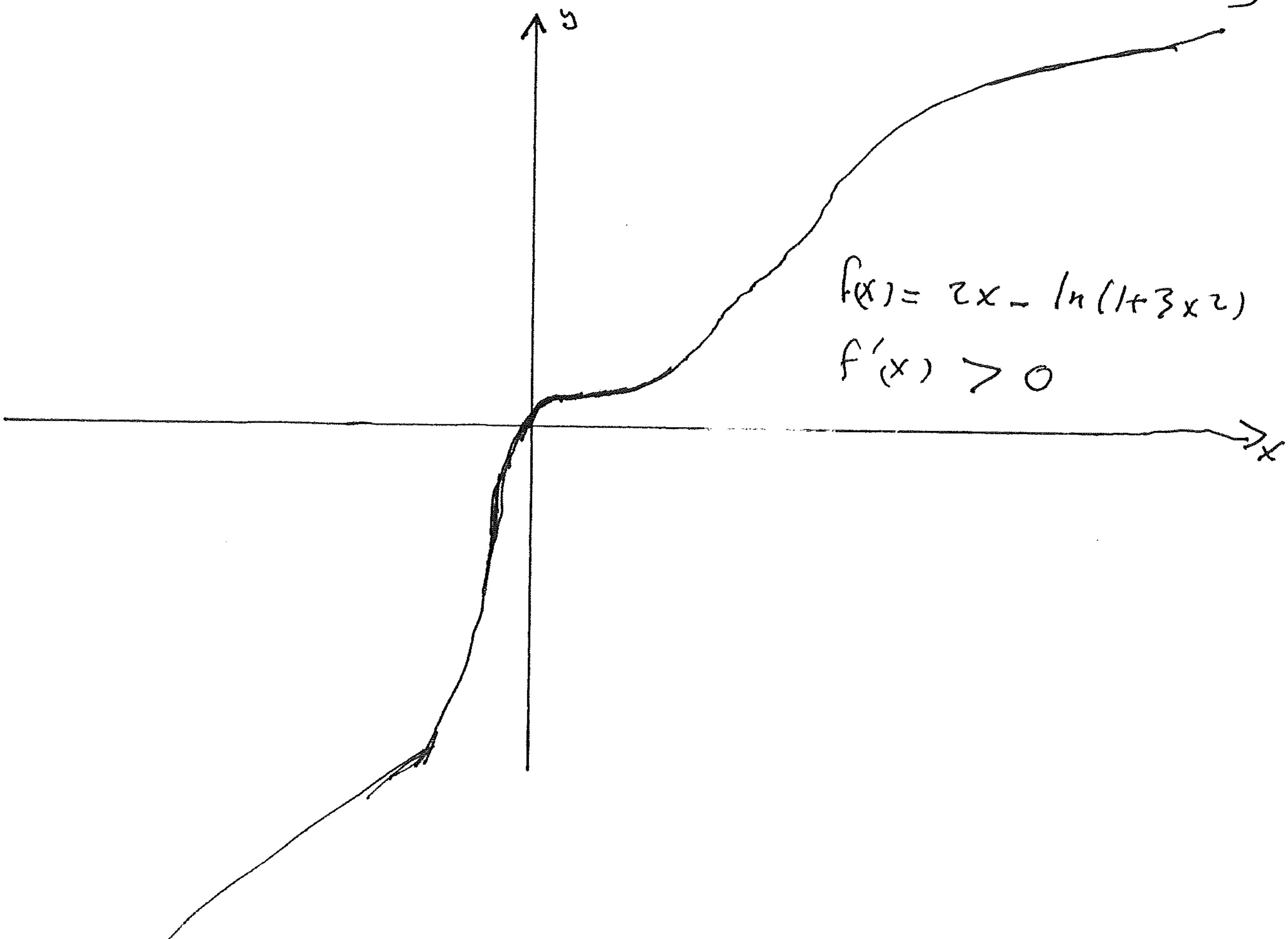
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x - \ln(1+3x^2)\right) = 2 - \frac{d}{dx}\ln(1+3x^2)$$

Vi använder $\frac{d}{dx}\ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ och får

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{1+3x^2}\cdot\frac{d}{dx}(1+3x^2) = 2 - \frac{6x}{1+3x^2}$$

$$= \frac{2(1+3x^2)-6x}{1+3x^2} = \frac{6x^2-6x+2}{1+3x^2} = \frac{6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{1+3x^2} > 0$$

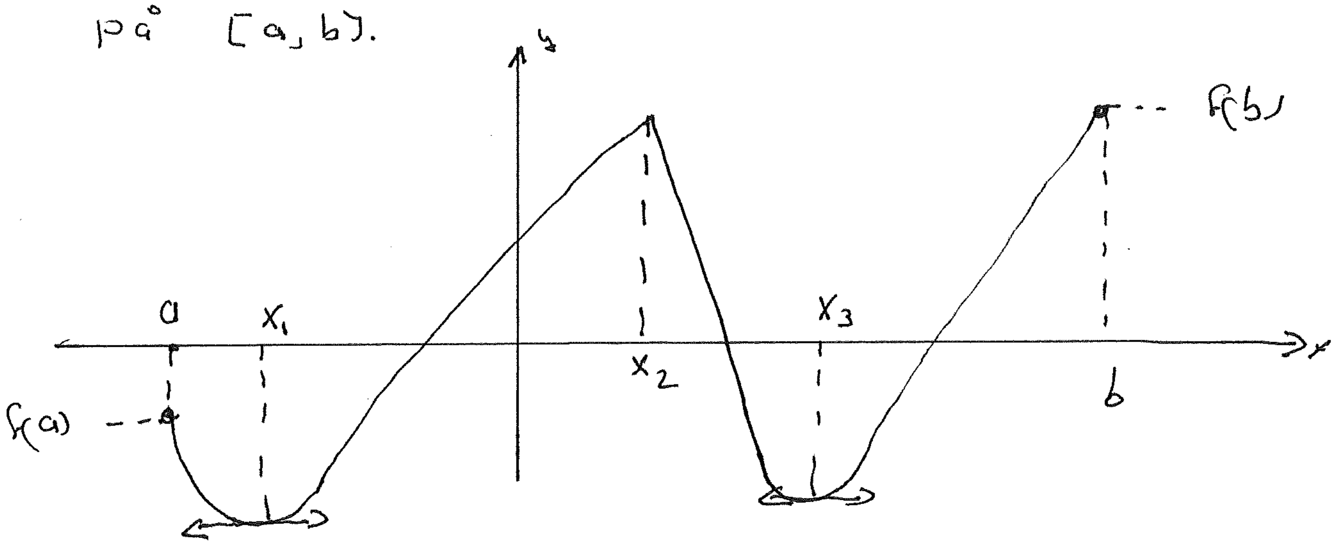
Alltså $f(x) = 2x - \ln(1+3x^2)$ är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ och $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
Detta ger att $f(x) = 2x - \ln(1+3x^2)$ är strängt växande för alla $x \in \mathbb{R}$ (har en invers)



Egenskaper hos kontinuerliga funktioner.

EXISTENSEN AV EXTREMVÄRDEN

OM f är kontinuerlig på ett kompakt intervall $a \le x \le b$ ($[a, b]$) så har f ett största och ett minsta värde på $[a, b]$.



f EJ DERIVERBAR i x_2

i x_1 och x_3 har vi $f'(x_1) = 0$, $f'(x_3) = 0$

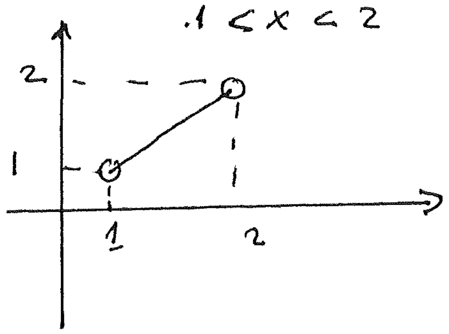
x_2 kallas för singulär punkt

x_1 och x_3 kallas för stationära punkter

Viktigt att (1) f skall vara kontinuerlig på $[a, b]$

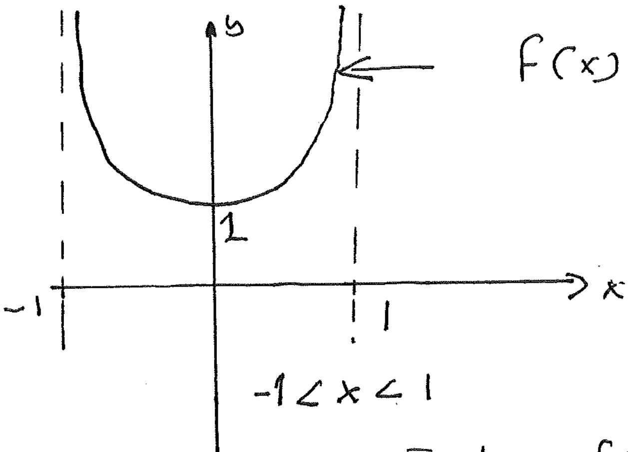
(2) $[a, b]$ sluten och begränsat intervall (KOMPAKT)

EX $f(x) = x$ $1 < x < 2$



SAKNAR MINSTA OCH STÖRSTA värde ty intervallet $1 < x < 2$ är öppen.

Ex

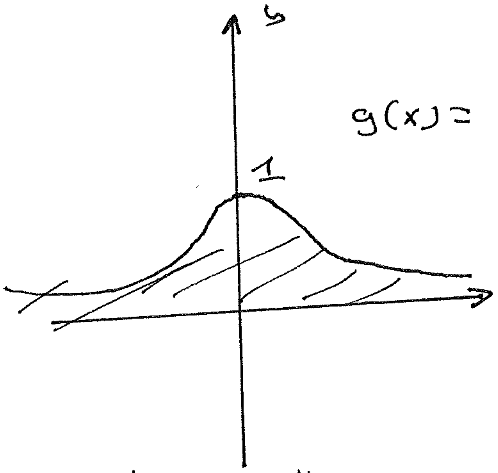


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d}{dx}(\arcsin x)$$

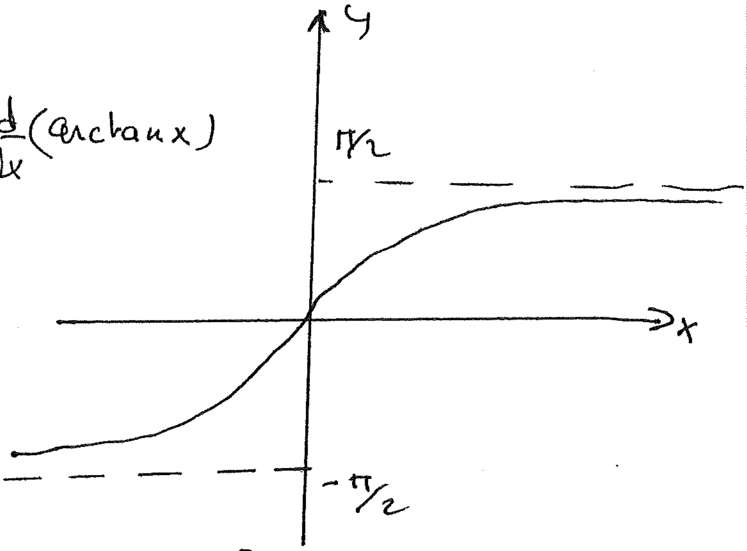
$-1 < x < 1$

f har ett minsta värde $f(0) = 1$, men saknar största värde

Ex



$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}(\arctan x)$$



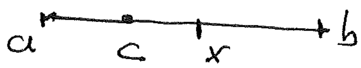
g har största värde $g(0) = 1$ men saknar minsta värde

$f(x) = \arctan x$ saknar minsta och största värde $x \in \mathbb{R}$

obs $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan x\right]_{-t}^{t} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Tillämpning: Om funktionerna f och g är deriverbara på (a, b) och $f'(x) = g'(x)$, $a < x < b$ så följer att $f(x) = g(x) + C$ ↑ konstant

Ty sätt $h(x) = f(x) - g(x)$ och medelvärdessatsen ger $h(x) - h(a) = (x-a)\,h'(c)$



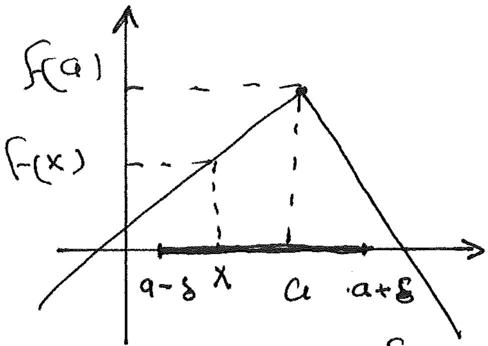
$h'(x) = 0$ på (a,b) $\Rightarrow$ $h'(c)$ alla $c \in (a,b)$

Detta ger att $h(x) = h(a) =$ konstant

dvs $f(x) - g(x) =$ konstant.

Hur ANVÄNDER MAN DERIVATAN

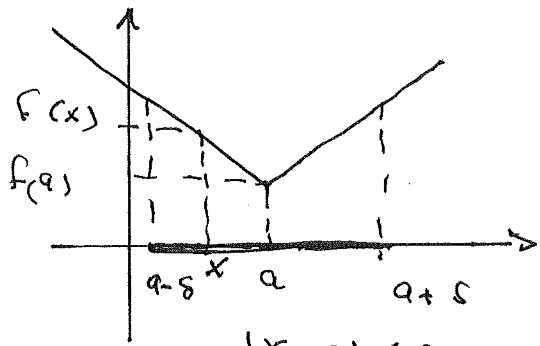
Problem. Bestäm funktions "toppar och Dalar"



$|x-a| < \delta$

f har ett lokalt maximum i $x = a$

dvs $f(x) \leq f(a), \quad |x-a| < \delta$



$|x-a| < \delta$

f har ett lokalt minimum i $x = a$

dvs $f(x) \geq f(a), \quad |x-a| < \delta$

Hur skall vi göra ?

A. FÖRSTA DERIVATANS TEST

Studera Teckenändringen hos $f'(x)$

x		a ← $f'(x)$ finns inte i $x=a$	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

Lokalt maximum i $x = a$

x		a ← $f'(x)$ finns inte i $x=a$	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

lokalt minimum i $x = a$

Resultat om lokala EXTREMVÄRDEN

ETT LOKALT EXTREMVÄRDE (max/min) kan antas i någon av följande punkter

1. Eventuella ÄNDPUNKTER där f är definierad (säg $f(a)$, $f(b)$)
2. Stationära punkter
   dvs de punkter där $f'(x) = 0$
3. singulära punkter: dvs de punkter där $f'(x)$ inte finns (hörnpunkter, $\lim_{x \to \pm a} f'(x) = \pm\infty$ (dvs tangenten har Lutning $\pm\frac{\pi}{2}$))

EX studera $f(x) = x - 2\arctan x$

Lösning f är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$

Vidare $x - 2\arctan x \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$

Ty $\lim\limits_{x\to\infty} (x - 2\arctan x) = \infty$ och $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-2\arctan x) = -\infty$

(obs $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ -\infty}} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$)

f saknar singulära punkter

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x - \arctan x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

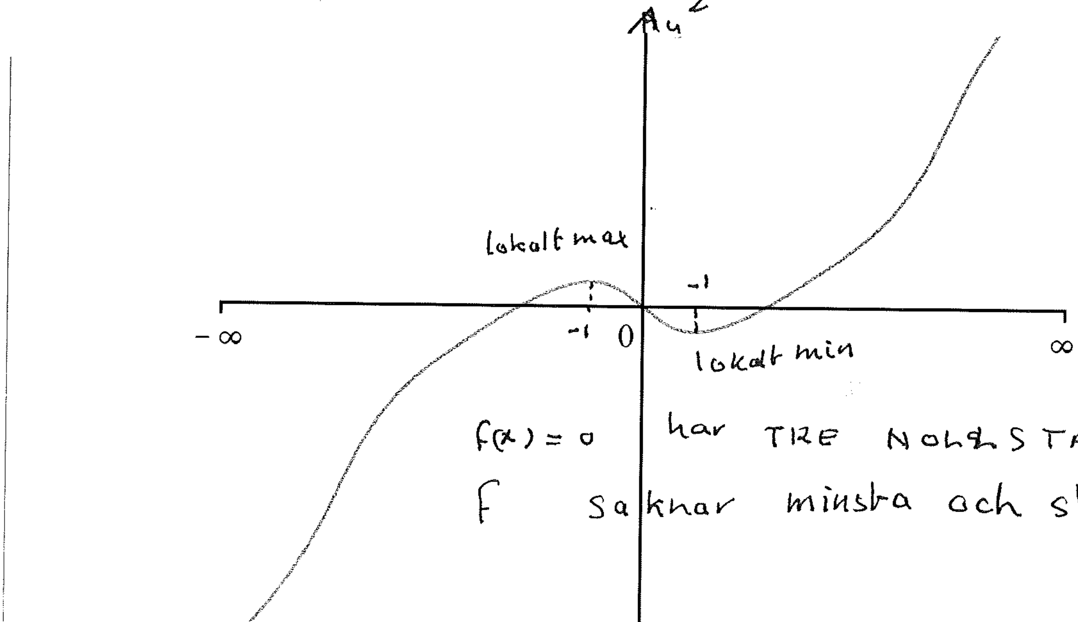
dvs $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Teckenväxling hos $f'(x)$:

x		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$	$+$		$-$		$+$

GÖR EN TABELL

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$	$\searrow$	$f(+1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$	$\nearrow$	



$f(x) = 0$ har TRE NOLLSTÄLLE!

f saknar minsta och största värde