Maclaurins formel

Maclaurins formel finns i kapitel nio i läroboken. Den här stencilen *ersätter* inte det kapitlet, utan är bara en kommentar till detta.

Den variant man normalt använder av Maclaurins formel ser ut så här:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + c_n(x)x^n, \quad \text{där} \tag{1}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{och} \tag{2}$$

$$c_n(x) \text{ är kontinuerlig i närheten av } x = 0 \text{ med} \tag{3}$$

$$c_n(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{4}$$

Observera att vi också har entydighetsstatsen SATS 3, som säger att om (1) och (3) gäller, så är också (2) och (4) uppfyllda. Alltsammans förutsätter att funktionen $f(x)$ är n gånger kontinuerligt derivetbar i närheten av $x = 0$.

Exempel

Vi har enligt formeln för geometrisk summa att

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Allstå:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} \tag{5}$$

Här är sista termen av typen $c_n(x)x^n$, där $c_n = \frac{1}{1-x}$. Alltså är formeln (5) Maclaurin-utveclkingen av funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Till exempel kan vi dra slutsatsen att $f^{(4)}(0) = 4!$.

Exempel på gränsvärdes-beräkning

Vi använder Maclaurin-utvecklingarna i SATS 2:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + c_4(x)x^4)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} - c_4(x)x^2 = \frac{1}{2} + c_4(0)0^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En liten skillnad med framställningen här mot bokens är att jag använder $c_n(x)$ som är kontinuerlig, medan boken skriver $B_n(x)$ där $B_n(x)$ är lokalt begränsad. Jag vet inte varför författarna valt denna i mitt tycke litet klumpigare beteckning.

Maclaurin-utvecklingar förekommer mycket ofta i tillämpningar. Man har behov av att approximera komplicerade uttryck i närheten av något värde; ni kommer säkert att stöta på dem flera gånger i andra ämen här på KTH. Det finns en motsvarighet till Maclaurin-utvecklingar för funktioner i flera variabler, och ofta är det denna mer generella form som används. Jag anser att Maclaurin-utvecklingar är ett av de viktigaste momenten i den här kursen.

Det är praktiskt att kunna vissa Maclaurin-utvecklingar utantill, eftersom man kommer mycket långt med dessa utan att behöva göra mödosamma kalkyler.

Utantill:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots$$

Här betyder prickarna $\cdots$ att man fortsätter utvecklingen till någon lämplig potens x^{n-1} och att man sedan har en ”restterm” av typen $c_n(x)x^n$. Funktionen c_n beror naturligtvis inte bara på n utan också på vilken funktion man utvecklar.

Ett exempel från mekaniken

Här är ett exempel på användning av Maclaurins formel i en tillämpning. Enligt relativitetsteorin är rörelseenergin hos en partikel med hastigheten v och massan m

$$E = mc^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

Här är c =ljustets hastighet. I normalfall är v mycket mindre än c. Låt oss införa $x = -\frac{v^2}{c^2}$. Vi har då

$$E = mc^2\big((1+x)^{-\frac{1}{2}} - 1\big)$$

Nu Maclaurin-utvecklar vi

$$\begin{aligned}
E &= mc^2\big(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + C_3(x)x^3 - 1\big) \\
&= mc^2\big(- \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + C_3(x)x^3\big) \\
&= mc^2\Big(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + C_3\Big(\frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{v^6}{c^6}\Big) \\
&= \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + C_3\Big(\frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{mv^6}{c^4}
\end{aligned}$$

(Jag använder stort C för resttermen så man inte förväxlar den med ljushastigheten.) Här känner vi igen den första termen: i klassisk mekanik är rörelse-energin just $\frac{mv^2}{2}$. Den andra termen är den *första korrektionstermen;* den är mycket liten för måttliga hastigheter v, eftersom c^2 förekommer i nämnaren, och c är stort. Den tredje termen är en ”restterm”; den är ännu mycket mindre än den andra, eftersom den har c^4 i nämnaren.

Vi ser alltså hur Maclaurins formel hjälper oss att se sambandet mellan energin i relativitetsteorin och i klassisk mekanik, och hur mycket de skiljer sig åt.