KTH Matematik

Extra uppgifter i SF1625 Envariabelanalys

1. Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[0,1]$. Hur ska konstanten k väljas för att $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-k)^2\,dx$ ska bli så litet som möjligt?

2. A. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \arccos x$. Ange definitionsmängd och värdemängd.
B. Beräkna derivatan av funktionen $g(x) = \arcsin x^2$.
C. Beräkna $\tan(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}})$.

3. Betrakta differentialekvationen $y'(x) = 3 + \cos y(x) + \cos x$. Det är ett faktum att varje lösning $y(x)$ till denna differentialekvation uppfyller att $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. Varför?

4. Om man approximerar serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+2k^4}$ med dess nionde partialsumma – är det då säkert att absolutbeloppet av felet är mindre än 10^{-3} ?

5. A. Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats.
B. Beräkna $g'(x)$ om $g(x) = \int_0^{\tan x} \sqrt{t^2+1}\,dt$ med $0 < x < \pi/2$.

6. Låt $h(x) = \arcsin x$. Sök en punkt ξ som uppfyller villkoret i differentialkalkylens medelvärdessats på intervallet $[0,1]$.

7. En partikel rör sig längs ellipsen $x^2 + 2y^2 = 6$. Bestäm hur fort partikeln rör sig vertikalt om den rör sig med hastighet 2 åt vänster i punkten $(2,1)$. Åt vilket håll rör sig partikeln i höjdled?

8. A. Rita en figur och förklara vad som menas med undersumma, översumma och Riemannsumma för en funktion på ett intervall. Alla beteckningar du inför ska förklaras.
B. Skriv upp en Riemannsumma med 10 delintervall som approximerar integralen $\int_0^1 x^2\,dx$.
C. Beräkna integralen i B genom att göra en Riemannsumma med n delintervall och låta n gå mot oändligheten. Det kan vara användbart att veta att $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

9. Använd Riemannsummor för att approximera arean mellan x-axeln och kurvan $y = 2x - x^2$, där $0 \le x \le 2$. Vad blir den exakta arean? Ev användbart: $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ och $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

10. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''(t) + 4y(t) = \sin 2t$ som går genom origo.

11. Ge exempel på, eller förklara varför det inte finns, en funktion som ...
A. är kontinuerlig på intervallet $(0,1)$ och saknar största värde.
B. är kontinuerlig på intervallet $(0,1)$ och antar största värde.
C. är kontinuerlig på intervallet $(0,1]$ och antar största värde.
D. är kontinuerlig på intervallet $(0,1)$ men ej deriverbar i punkten $x = 1/2$.

12. Härled sambandet $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ genom att derivera sambandet $\tan(\arctan x) = 1$.

13. A. Härled formeln för längden av en kurva given på parameterform ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$).
B. Lunchkön i KTHs självservering beskrivs i ett koordinatsystem med origo i kassan genom $x = 3t^2$, $y = (4t+1)^{3/2}/2 - 1/2$, $0 \leq t \leq 2$. Om man antar att varje student upptar en plats av en längdenhet, hur många personer står i kön?

14. Bestäm definitionsmängd, eventuella asymptoter samt lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$. Skissa grafen och bestäm funktionens värdemängd.

15. Använd substitutionen $t = \tan(x/2)$ för att beräkna integralen
$$\int \frac{dx}{3 + 2\sin x + 3\cos x}.$$

16. Bestäm arean av den minsta triangel som begränsas av x-axeln, y-axeln och en linje med negativ riktningskoefficient genom punkten $(1,3)$.

17. Antag att F är en funktion med derivatan $F'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ för $x > 0$. Uttryck $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}\,dx$ med hjälp av F.

18. Rullkurvan. Vi följer en punkt P som sitter på ett hjul med radien R, då hjulet rullar på plan mark. Om t betecknar den vinkel hjulet rullat från start ($t = 0$) till mål ($t = 2\pi$), kan man visa att
$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$
där (x,y) är läget (koordinaterna) för punkten P. Hur lång sträcka tillryggalägger punkten P då hjulet rullar ett varv? Kontrollera rimligheten i ditt svar?

19. Beräkna följande gränsvärden:
A. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$
B. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

20. Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

A. Använd derivatans definition för att bestämma $f'(0)$
B. Förklara varför man inte kan använda produktregeln för att bestämma $f'(0)$.
C. Är derivatan $f'(x)$ kontinuerlig i punkten $x = 0$?

21. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:
A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+n+2}$
B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n+6^n}{7^n}$.
C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n\ln n}$.
D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4\sqrt{n+3}}$.

22. En liten kloss glider på ett bord mot ett mål. Låt x vara avståndet från klossens framkant till målsnöret. Vi antar att klossens hastighet bara beror på avståndet till målpunkten, dvs att hastigheten v är en funktion bara av x. Låt klossen starta vid punkten $x = 1$. Hinner klossen fram till målsnöret på ändlig tid? Kan du avgöra detta i nedastående fall?
A. $v = \sqrt{x}$.
B. $v = x$.

23. En funktion är definierad i intervallet $-1 \leq x \leq 1$ enligt följande:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{om } x = 1/n,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases} .$$

Använd derivatans definition för att avgöra om funktionen f har första respektive andra derivata i origo.

24. Härled formeln för volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan x-axeln och kurvan $y = f(x)$ roterar runt x-axeln. Skriv också upp lämpliga villkor på funktionen f för att formeln ska gälla.

25. När en fjäder sträcks eller trycks ihop är kraften proportionell mot fjäderns längdändring (Hookes lag). För en viss fjäder gäller att belastningen 250 N ger en längdändring av 5 cm. Bestäm det arbete som krävs för att tänja ut fjädern 10 cm från jämviktsläget. (Ur Persson och Böiers: Analys i en variabel)

26. Vid en provskjutning beräknas en projektil följa parabeln $y = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Hur nära origo kommer projektilen?

27. Beräkna med lämpligt valt Maclaurinpolynom (Taylorpolynom kring origo alltså) ett närmevärde till $\cos(1/10)$ så att absolutbeloppet av felet är mindre 10^3.

28. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring origo till funktionen $f(x) = \sqrt{25 + x}$. Använd det för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{26}$. är felet säkert mindre än $0,001$?

29. I en viss bakteriepopulation räknar man med att tillväxttakten är proportionell mot mängden bakterier. Om proportionalitetskonstanten är $0,01$ och mängden bakterier vid tiden $t = 0$ är 1000, ställ upp en differentialekvation för mängden bakterier vid tiden t och lös den. Hur lång tid tar det för bakterikolonin att fördubblas i storlek?

30. Differentialekvationen $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u}{RC}$ beskriver spänningen u vid tiden t då en kondensator med kapacitans C laddas ur över ett motstånd med resistans R. Lös differentialekvationen om $R = 1$, $C = 0,2$ och $u(0) = 10$.