KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 1A
torsdagen den 5 november 2009 klo 08.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.
Kom ihåg logaritmisk derivata.

1. Beräkna derivatan av funktionen

$$y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x \right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x \right)$$

genom att derivera varje term för sig och sedan förenkla summan *så långt möjligt*. Vilken slutsats kan man då draga om själva funktionen?

2. Skissa kurvan

$$y = x^3\sqrt{4-x^2}$$

ordentligt. Det skall tydligt framgå vad denna funktion har för (naturlig) definitionsmängd (definitionsområde, domän) och värdeförråd (värdemängd) samt *var* tangenten till kurvan är parallell med någon koordinataxel.

3. Du skall bygga enklast möjliga inhägnad för Ditt lilla husdjur genom att stänga in det i ett hörn av Ditt rum bakom ett spikrakt staket eller stängsel som har längden en meter. Hur skall Du placera staketet för att inhägnaden skall bli så stor som möjligt och hur stor blir då den inhägnade arean?

SVAR till 1A:

1. Skriv $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
Man får $f'(x) = \cdots = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Den ursprungliga funktionen $y = f(x)$ är alltså konstant, och denna konstant är faktiskt noll.

2. Skriv $g(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$. Dess logaritmiska derivata är
$\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{d}{dx}\left(3\ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln(4-x^2)\right) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{4-x^2} = \cdots = \dfrac{4(3-x^2)}{x(4-x^2)}$, med nollställena $x = \pm\sqrt{3}$.
Def.mängd: $-2 \le x \le 2$, värdeförråd: $-3\sqrt{3} \le y \le 3\sqrt{3}$. Max är $g(\sqrt{3})$ och min är $g(-\sqrt{3})$; i dessa punkter är tangenten vågrät, liksom även i origo.
I ändpunkterna $x = \pm 2$ är tangenten lodrät.

3. Lägg hörnet i origo och låt rummet beskrivas av en del av första kvadranten. Ställ staketet mellan punkterna $(x, 0)$ och $(0, y)$. Inhägnadens area blir $A = xy/2$. Att staketet har längd 1 betyder att $x^2 + y^2 = 1$ (#) .
Vi skall alltså maximera A under bivillkoret (#) . Vi löser därifrån ut att $y = \sqrt{1-x^2}$, varför vi skall maximera $h(x) = 2A = x\sqrt{1-x^2}$.
Derivatan $h'(x) = \cdots = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ blir noll då $x = 1/\sqrt{2}$. Då blir också $y = 1/\sqrt{2}$. Detta betyder att staketet ställs mot väggen med vinkeln 45 grader, och att inhägnaden blir en halv kvadrat med area $1/4$.

KTH Matematik

SF 1625 Envariabelanalys för M1
Kontrollskrivning 1B
torsdagen den 5 november 2009 klo 08.15

Inga hjälpmedel är tillåtna. Förklara allt Du gör. Svaren måste motiveras.
Kom ihåg logaritmisk derivata.

1. Varje tangent till kurvan

$$C \quad : \quad y = \exp\left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)$$

har en lutningskoefficient k. Vilka lutningskoefficienter förekommer för denna kurva C, dvs för vilka k-värden finns det en tangent till kurvan C, som har just denna lutning? (Har kurvan en tangent i varje punkt?)

Inledning. Ett vanligt optimeringsproblem lyder så: Finn det maximala värdet för produkten $x^m y^n$, då man på förhand vet att summan $x + y =$ ett givet tal. Här är m och n positiva heltal (eller bara positiva tal). Vi specificerar uppgiften till följande:

2. För vilka tal x och y antager uttrycket $x^m y^n$ sitt största värde, om man kräver att punkten (x, y) skall ligga på linjen $x + y = m + n$ i första kvadranten?

(Den som tycker det är enklare med siffror får gärna antaga att $m = 3$ och $n = 4$).

3. Betrakta för $0 \leq x \leq 1$ funktionen

$$y = \arccos x - \arcsin\sqrt{1 - x^2}\ .$$

Derivera den och förenkla resultatet så långt möjligt. Vad kan man sedan säga om själva funktionen?

SVAR till 1B:

1. Skriv $y = f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)$. Tangentens lutningskoefficient (lk) k i punkten $(x_0, f(x_0))$ ges av derivatan i punkten, $k = f'(x_0)$. Frågan är alltså: Vilka värden antager derivatan $f'(x)$?
Detta undersöks enklast genom att söka max och min för f' genom att se efter var derivatan av f' , dvs f'' , är noll.

Andraderivatan av f är $f''(x) = (16x^2 - 4)\exp\left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)$, med nollställena $x = \pm 1/2$. Förstaderivatan $f'(x) = -4x\exp\left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)$ har därför det maximala värdet $f'(-1/2) = -(-4 \cdot 1/2)\exp\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^0 = 2$. P s s blir det minimala värdet $f'(1/2) = \cdots = -2$. Vidare går $f(x)$ mot noll då x går mot $\pm\infty$. Derivatan antager därför alla värden mellan ± 2 inklusive ± 2.
Svar: Alla k-värden $-2 \leq k \leq 2$ förekommer som lutn.koeff. för kurvan $y = f(x), \quad -\infty < x < \infty$.

2. ... Maximera $f(x) = x^m (L - x)^n$, där $L = m + n$. Den logaritmiska derivatan är

$$f'(x)/f(x) = \frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{d}{dx}\Big(m\ln x + n\ln(L - x)\Big) = \frac{m}{x} - \frac{n}{L - x} = \cdots =$$

$= \frac{L(m - x)}{x(L - x)}$, som blir noll då $x = m$ och $y = n$.

3. ... Derivatan blir $f'(x) = \cdots = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$, varav $f(x) =$ const. $= \cdots = 0$, för alla $0 \leq x \leq 1$.