

Modell-Tentamen 1 i SF1625 Envariabelanalys

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

- Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = xe^{-2x}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan också samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.
- Para ihop nedanstående integrander och primitiva funktioner. OBS: några blir över. Visa för varje par du hittar precis hur de hänger ihop genom en formel som innehåller antingen ett integraltecken eller också en deriveringsymbol.

$$\begin{array}{cccc} \frac{x^4}{4!} & 4! \left(-\frac{1}{x}\right)^5 & 2 \ln(x^4 + 1) & 6 \sinh x \\ x^2 \ln x & 2 \arctan(x^2) & \ln x^2 + 2 \ln(e/x) & \frac{24}{x^5} \\ 0 & 3e^x + 3e^{-x} & 5! \left(-\frac{1}{x}\right)^6 & 2x \ln x \\ \frac{4x}{x^4 + 1} & 6e^x + 6e^{-x} & \frac{x^5}{5!} & x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \end{array}$$

- Bestäm volymen av den rotations kropp som uppstår då det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 5x^{-3/2}$ och $y = \sqrt{x}$ samt linjen $x = 1$ roteras ett varv runt x -axeln.
- Man konstruerar en ränna av tre likadana plankor som är 10 cm breda. En plankor ligger på marken, de båda andra har vinkel θ med horisontalen. Hur ska θ väljas för att rännan ska rymma maximal mängd vatten?
- På vilka intervall växer funktionen $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ när $0 < |x| < e$.

6. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$. Avgör speciellt om f har några lokala maxima eller minima samt om grafen har lodrät tangent någonstans.
7. Visa hur man kan använda Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärden genom att beräkna $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right)$.
8. A. Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en punkt x_0 ?
 B. Ge exempel på en kontinuerlig funktion f som uppfyller att

$$\int_1^4 f(x) dx = -1 \quad \text{och} \quad \int_4^9 f(x) dx = 5.$$

9. Visa att $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < n \ln n - n + 1 < \sum_{k=2}^n \ln k$. Tips: betrakta integralen $\int_1^t \ln x dx$.
10. Finn ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$, $p'''(0) = f'''(0)$, där $f(x) = \int_0^x e^{t^2+t} dt$.