Dag 18. L'Hospitals regel

Rekommenderade uppgifter

4.9.2 Beräkna $\lim_{x\to 2} \dfrac{\log(2x-3)}{x^2-4}$.

Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(2x-3)}{x^2-4} = \left\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\right\} = \lim_{x\to 2} \frac{\dfrac{2}{2x-3}}{2x} = 1/2.$$

Egentligen är vårt skrivsätt lite oegentligt. Vi vet inte om vi kan använda l'Hôpitals regel förrän vi visat att högerledets gränsvärde existerar (eller är lika med $\pm\infty$).

4.9.4 Beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

Vi Maclaurinutvecklar,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\bigl(1-\frac{1}{2}a^2x^2+O(x^4)\bigr)}{1-\bigl(1-\frac{1}{2}b^2x^2+O(x^4)\bigr)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}a^2x^2+O(x^4)}{\frac{1}{2}b^2x^2+O(x^4)} = \{\text{förkorta med } x^2\}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}a^2+O(x^2)}{\frac{1}{2}b^2+O(x^2)} = \frac{a^2}{b^2}.\end{aligned}$$

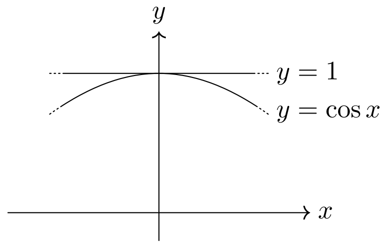
4.9.6 Beräkna $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1}$.

I detta exempel ser vi att nämnaren kan faktoriseras så att täljaren kan förkortas bort,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3}-1}{(x^{1/3}-1)(x^{1/3}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{1/3}+1} = 1/2.$$

4.9.8 Beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\log(1+x^2)}$.

Om vi tittar på täljaren och kommer ihåg hur cosinus-funktionen ser ut nära 0



så ser vi att uttrycket $1-\cos x$ har ett högre ordningens nollställe i $x=0$. Om vi använder l'Hôpitals regel kommer vi bli tvungna att derivera flera gånger. Eftersom vi vet täljarens och nämnarens Maclaurinutveckling väljer vi att Maclaurinutveckla,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\log(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\bigl(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\bigr)}{x^2+O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{x^2+O(x^4)}\\ &= \{\text{förkorta med } x^2\} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}+O(x^2)}{1+O(x^2)} = 1/2.\end{aligned}$$

Anm. Givetvis går det bra att använda l'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\log(1+x^2)} &= \left\{\tfrac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}\\ &= \left\{\tfrac{0}{0}\right\} = 1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = 1\cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

4.9.10 Beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{10^x-e^x}{x}$.

Nämnaren har ett enkelt nollställe så det lutar kanske åt l'Hôpitals regel. Dessutom är Maclaurinutvecklingen av 10^x inte direkt åtkomlig ur närminnet. Vi använder l'Hôpitals regel!

$$\lim_{x\to 0} \frac{10^x-e^x}{x} = \left\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{10^x\cdot\log x - e^x}{1} = \log 10 - 1.$$

4.9.12 Beräkna $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(ex)-1}{\sin \pi x}$.

Nämnaren har ett enkelt nollställe i $x=1$ så det lutar åt l'Hôpitals regel. Dessutom är Taylorutvecklingen av nämnaren och täljaren kring $x=1$ inga inlärda formler. Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(ex)-1}{\sin \pi x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{\pi\cos \pi x} = -\frac{1}{\pi}.$$

4.9.14 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Nämnaren har ett 3:e ordningens nollställe i $x=0$, så vi använder Maclaurinutveckling.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\bigl(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\bigr)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\bigl(\tfrac{1}{6}+O(x^2)\bigr) = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

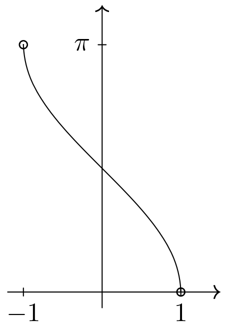
4.9.18 Beräkna $\lim\limits_{r\to \pi/2} \dfrac{\log \sin r}{\cos r}$.

Cosinus-funktionen har bara enkla nollställen varför vi provar med l'Hôpitals regel,

$$\lim_{r\to \pi/2} \frac{\log \sin r}{\cos r} = \lim_{r\to \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin r}\cdot \cos r}{-\sin r} = \lim_{r\to \pi/2} -\frac{\cos r}{\sin^2 r} = 0.$$

4.9.20 Beräkna $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arccos x}{x-1}$.

Grafen till arccos-funktionen har utseendet



d.v.s. en lodrät tangent vid $x=1$. Detta utesluter Taylorutveckling. Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{x-1} = \bigl\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\bigr\} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = -\infty.$$

4.9.24 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$.

Gränsvärdet har det obestämda uttrycket 0^0. Det första vi bör göra är att logaritmera för att få uttrycket i en mer "vanlig" form.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \exp\Bigl(\sqrt{x}\cdot\log x\Bigr) = \bigl\{\text{exp är kontinuerlig}\bigr\}\\ &= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot \log x\Bigr)\end{aligned}$$

Gränsvärdet är fortfarande inte i en form som vi kan använda våra standardtekniker på, men en enkel omskrivning gör susen!

$$\begin{aligned}&= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/\sqrt{x}}\Bigr) = \bigl\{\tfrac{\infty}{\infty};\ \text{l'Hôpitals regel}\bigr\}\\ &= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\frac{-1/2}{x\sqrt{x}}}\Bigr) = \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x}\Bigr) = \exp 0 = 1.\end{aligned}$$

Extrauppgifter

X.1 Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Om vi använder l'Hôpitals regel fås

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty}(1+\cos x) \quad \text{divergerar.}$$

Eftersom gränsvärdet i högerledet divergerar kan vi inte använda l'Hôpitals regel.

En alternativ metod ger istället gränsvärdet,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+0 = 1.$$