1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = xe^{-2x}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan också samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

Lösning:

a) $f(x) = xe^{-2x}, \ -1 \le x \le 1$

Definitionsmängd: $D_f = [-1,1]$

En funktion $f(x)$ kan ha lokal maximum eller lokal minimum endast i punkter x av följande tre typer:

(i) *stationära punkter* (punkter $x \in D_f$ där $f'(x) = 0$)

(ii) *ändpunkter* till D_f (endast de ändpunkter som tillhör D_f)

(iii) *singulära punkter* (punkter $x \in D_f$ där $f'(x)$ inte existerar)

Derivatan:

$f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$ är också definierad för alla x i $[-1,1]$.

Ändpunkter:

$f(-1) = -e^2,$ $(1) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

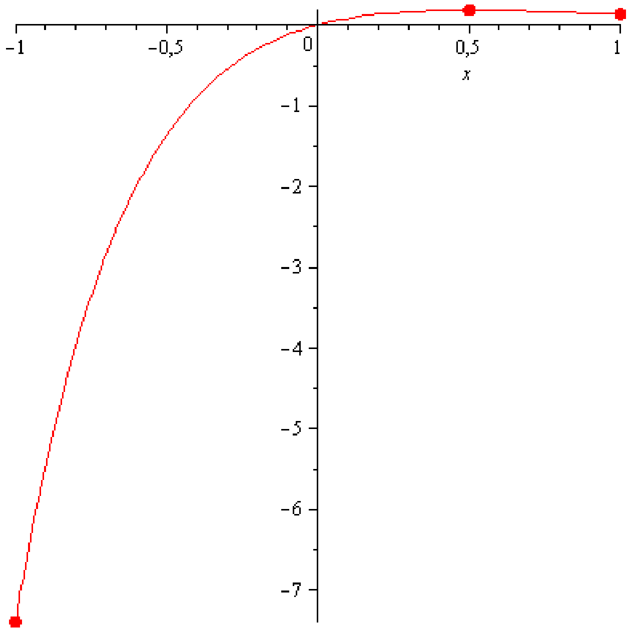
Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$, $f(1/2) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$

Förstaderivatans tecken (lägg märke till att $e^{-2x} > 0$ för alla x):

x	-1		1/2		1
$f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$		+	0	-	
$f(x)$	$-e^2$	↗	$\frac{1}{2e}$ maximum	↘	$\frac{1}{e^2}$

Singulära (Icke-deriverbara) punkter i den inre delen av intervallet (dvs punkter där funktionen är definierad men saknar första derivatan) : Denna funktion saknar singulära punkter eftersom funktionen är deriverbar i alla punkter $x \in (-1,1)$.

Grafen till f(x) för $-1 \le x \le 1$.



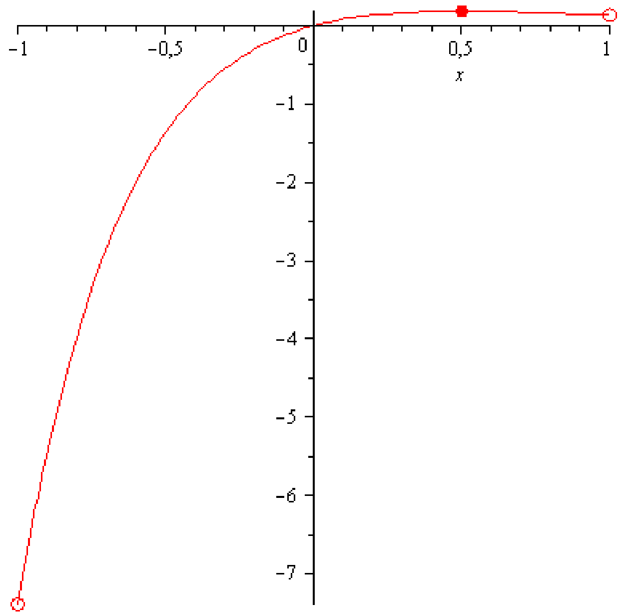
Svar a) Funktionens största värde i det slutna intervallet $[-1,1]$ är $y_{max} = \frac{1}{2e}$.

Funktionens minsta värde i $[-1,1]$ är $y_{min} = -e^2$.

b) $f(x) = xe^{-2x}, \quad -1 < x < 1$

I det här fallet är funktionen inte definierad i ändpunkterna.

Stationär punkt är samma som i a.



Svar b)

Funktionens största värde i det öppna intervallet $(-1,1)$ är $y_{max} = \frac{1}{2e}$.

Funktionens minsta värde i $(-1,1)$ saknas .

2. Para ihop nedanstående integrander och primitiva funktioner. OBS: några blir över. Visa för varje par du hittar precis hur de hänger ihop genom en formel som innehåller antingen ett integraltecken eller också en deriveringssymbol.

$$\frac{x^4}{4!} \qquad 4!\left(-\frac{1}{x}\right)^5 \qquad 2\ln(x^4+1) \qquad 6\sinh x$$

$$x^2\ln x \qquad 2\arctan(x^2) \qquad \ln x^2 + 2\ln(e/x) \qquad \frac{24}{x^5}$$

$$0 \qquad 3e^x+3e^{-x} \qquad 5!\left(-\frac{1}{x}\right)^6 \qquad 2x\ln x$$

$$\frac{4x}{x^4+1} \qquad 6e^x+6e^{-x} \qquad \frac{x^5}{5!} \qquad x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$$

Lösning:

Vi använder följande ekvivalens:

$$\int f(x)dx = g(x) + C \overset{def}{\Longleftrightarrow} g'(x) = f(x)$$

Svar:

1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5!}\right) = \frac{x^4}{4!}$

2) $\frac{d}{dx}\left(4!\left(-\frac{1}{x}\right)^5\right) = 5!\left(-\frac{1}{x}\right)^6$

$eftersom\ \frac{d}{dx}\left(4!\left(-\frac{1}{x}\right)^5\right) = \frac{d}{dx}(-4!\,x^{-5}) = 5!\,x^{-6} = 5!\left(-\frac{1}{x}\right)^6$

3) $\frac{d}{dx}(6\sinh(x)) = \frac{d}{dx}\frac{6(e^x - e^{-x})}{2} = 3e^x + 3e^{-x}$

4) $\frac{d}{dx}(ln\,x^2 + 2ln(e/x)) = 0$

$eftersom\quad \ln x^2 + 2\ln(e/x) = 2\ln x + 2\ln e - 2\ln x = 2\ln e = \ const$

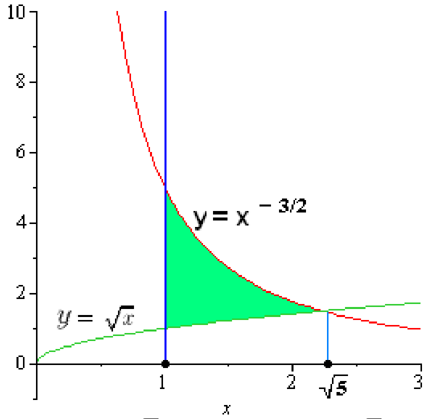
5) $\frac{d}{dx}\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right) = 2x\ln x$

6) $\frac{d}{dx}(2\arctan\ x^2) = \frac{4x}{x^4+1}$

3. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 5x^{-3/2}$ och $y = \sqrt{x}$ samt linjen $x = 1$ roteras ett varv runt x-axeln.

Lösning:

Skärningspunkt mellan kurvorna:



$$\frac{5}{x^{3/2}} = x^{1/2}$$

$$\Rightarrow \; 5 = x^2$$

$$\Rightarrow \; x = \pm\sqrt{5}$$

Eftersom $\sqrt{x}$ är definierad för x>0

har vi en lösning $= \sqrt{5}$.

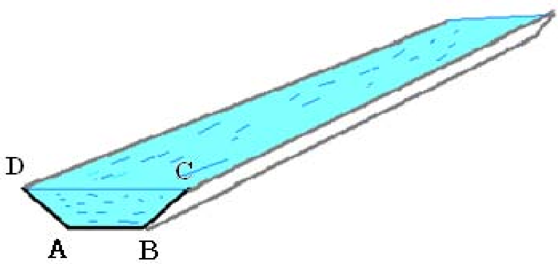
$$Volymen = \pi \int_1^{\sqrt{5}} (5x^{-3/2})^2 dx - \pi \int_1^{\sqrt{5}} (x^{1/2})^2 dx = \pi \int_1^{\sqrt{5}} 25x^{-3} dx - \pi \int_1^{\sqrt{5}} x dx$$

$$= \left[25\pi \frac{x^{-2}}{-2} - \pi \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{5}} = 8\pi$$

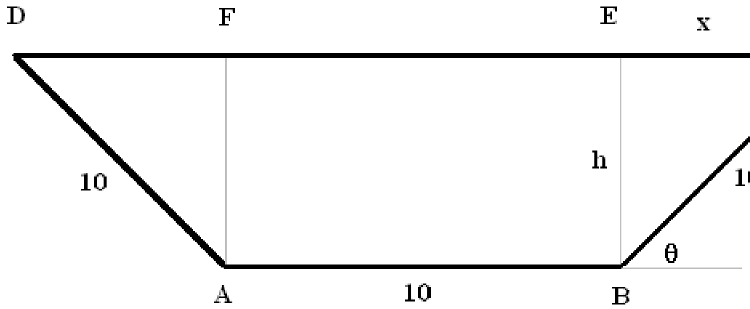
Svar: Volymen $=8\pi$

4. Man konstruerar en ränna av tre likadana plankor som är 10 cm breda. En planka ligger på marken, de båda andra har vinkel θ med horisontalen. Hur ska θ väljas för att rännan ska rymma maximal mängd vatten?

Lösning:



Rännan ska rymma maximal mängd av vatten om ”snittytans” area (dvs arean av trapetsen ABCD) är störst.



$h = \ 10 \sin \theta$

$x = 10 \cos \theta$

där θ ligger mellan 0 och π/2.

Arean= $10h + 2\frac{xh}{2} = 10h + xh = \ 10 \cdot 10 \sin \theta \ + 10 \sin \theta \ \cdot 10 \cos \theta$

Vi betecknar arean med $f(\theta)$ och deriverar med avseende på θ

$f(\theta) = 100 \sin \theta + 100 \sin \theta \cos \theta$

$\Rightarrow f'(\theta) = 100 \cos \theta + 100 \cos^2 \theta \ - \ 100 \sin^2 \theta$

$f'(\theta) = 0 \Rightarrow 100 \cos \theta + 100 \cos^2 \theta \ - \ 100 \sin^2 \theta \ = 0$

$\Rightarrow \cos \theta + \cos^2 \theta \ - \ \sin^2 \theta \ = 0$ (vi ersätter $\sin^2 \theta \ = 1 - \cos^2 \theta$)

$\Rightarrow 2 \cos^2 \theta \ + \cos \theta - \ 1 = 0$

Härav får vi

$\cos \theta = \ 1/2$ och $\cos \theta = \ -1$

Eftersom θ ligger mellan 0 och π/2 har vi

$\cos \theta = \ 1/2$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Med hjälp av andra derivatan

$\left\{ \ f''(\theta) = -100 \sin \theta - 400 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \ f''(\frac{\pi}{3}) < 0 \ \right\}$

ser vi att $\theta = \frac{\pi}{3}$ är en maximipunkt.

Anmärkning: Maxarean=$f_{max} = 75\sqrt{3} \approx 129.9cm^2$,

I ändpunkterna har vi $f(0)=0$, $f(\pi/2)=100$.

Alltså, i intervallet [0 , π/2] har funktionen största värde $f_{max} = 75\sqrt{3}$ om $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Svar: $\pi/3$

5. På vilka intervall växer funktionen $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$ när $0 < |x| < e$.

Lösning:

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x} \quad , \qquad def mängden: 0 < |x| \ < e$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln|x|}{x^2} = \frac{1 - \ln|x|}{x^2}$$

Vi löser olikheten

$f'(x) > 0$

$$dvs \ \frac{1 - \ln|x|}{x^2} > 0$$

som ger

$1 - \ln|x| > 0 \Leftrightarrow |x| < e \qquad (och \ \ x \ \neq \ 0))$

Svar: $0 \ < |x| < e$

(Alternativt **Svar**: $x \in (-e \ 0) \cup (0, e)$)

6. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$. Avgör speciellt om f har några lokala maxima eller minima samt om grafen har lodrät tangent någonstans.

Lösning:

$\boldsymbol{Definitionsmängd}$: $2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \ \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$,

$D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Lägg märke till att **ändpunkterna** $\pm\sqrt{2}$ tillhör D_f och att

$$f(-\sqrt{2}) = 0, \quad f(\sqrt{2}) = 0.$$

Funktionen är kontinuerlig i det slutna intervallet $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (och därmed begränsad i detta intervall)

Asymptoter: Vi undersöker ändpunkterna till D_f men

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}_+} f(x) = 0 , \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}_-} f(x) = 0 \quad \Rightarrow (\,Ingen\ lodrät\ asymptot).$$

(*Anmärkning: Eftersom $f(x)$ är begränsad i D_f kunde vi se direkt att funktionen saknar lodräta asymptoter*)

På grund av definitionsmängden har funktionen varken sneda eller horisontella asymptoter.

Alltså har funktionen *ingen asymptot*.

Funktionens nollställen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{2-x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{2}$$

Funktionens tecken:

(Lägg märke till att $\sqrt{2-x^2} \geq 0$ för $x \in D_f$)

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2-x^2} > 0 \Leftrightarrow (x > 0\ och\ x \in D_f) \Leftrightarrow\ 0 < x \leq \sqrt{2}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x < 0$$

Första derivatan:

$$f(x) = x\sqrt{2-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2(1-x)(1+x)}{\sqrt{2-x^2}}$$

Vi ser att första derivatan (mer precis: vänsterderivatan, högerderivatan) inte är definierad i ändpunkterna (eftersom nämnaren i är $f'(x)$ är 0 i ändpunkterna,

och att

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}_+} f'(x) = -\infty \qquad \text{och} \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}_-} f'(x) = -\infty$$

Vi kan tolka detta enligt följande:

Funktionen har en **lodrät högertangent** i punkten $-\sqrt{2}$ och en **lodrät vänstertangent** i punkten $\sqrt{2}$.

Stationära punkter:

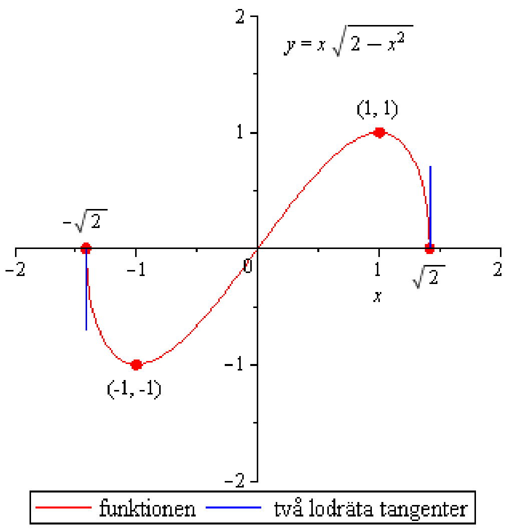
Ekvationen $f'(x) = 0$ dvs $\frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0$ har två lösningar -1 och 1.

Förstaderivatans tecken:

Vi analyserar förstaderivatans tecken i intervallet $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$f'(x) = \frac{2(1-x)(1+x)}{\sqrt{2-x^2}}$	ej def	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def
$f(x)$		↘	minimum	↗	maximum	↘	

Nu kan vi rita grafen till funktionen $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ med två lodräta tangenter i ändpunkterna



7. Visa hur man kan använda Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärden genom att beräkna $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right)$.

Lösning:

Vi skriver om uttrycket

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}=\frac{\sin t-t}{t\sin t}$$

och utvecklar täljaren och nämnaren med hjälp av Maclaurinsformeln för $\sin t$.

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots, \qquad -\infty<t<\infty$$

som vi kan skriva kortare med *O*-beteckning som

$$\sin t == \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+O(t^5)\ .$$

*Nu kan vi få **täljarens** Maclaurinutveckling:*

$$\sin t-t= -\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots=-\frac{t^3}{3!}+O(t^5)$$

Nämnarens *Maclaurinutveckling:*

$$t\sin t=\frac{t^2}{1!}-\frac{t^4}{3!}+\frac{t^6}{5!}-\frac{t^8}{7!}+\cdots=\frac{t^2}{1!}+O(t^4)$$

Därför

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t-t}{t\sin t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\frac{t^3}{3!}+O(t^5)}{\frac{t^2}{1!}+O(t^4)}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\frac{\mathrm{t}}{3!}+O(t^3)}{1+O(t^2)}\right)=\frac{0}{1}$$

$$=0$$

Svar: $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}\right)=0$

8. A. Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en punkt x_0 ?
B. Ge exempel på en kontinuerlig funktion f som uppfyller att

$$\int_1^4 f(x)\,dx=-1 \quad \text{och} \quad \int_4^9 f(x)\,dx=5.$$

Lösning:

A) **Definition:** En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x_0 om följande gäller:

$i)$ x_0 tillhör funktionens definitionsmängd

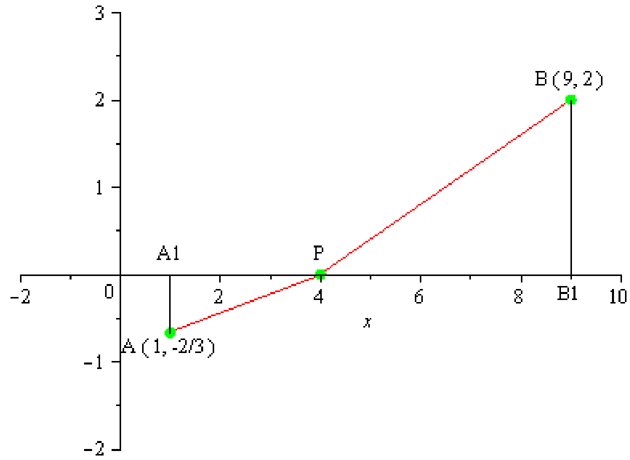
$ii)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

[$Anmärkning$: ii) kan skrivas på ekvivalent sätt som $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$

$= \lim_{x \to x_{0+}} f(x)$]

B) Det finns oändligt många kontinuerliga funktioner som satisfierar B.

Exempel: Vi kan t ex välja att $f(4) = 0$. Funktionen $f(x)$ definierar vi med två uttryck.



Längden av AA_1 i triangeln AA_1P (se bilden) väljer vi 2/3 så att triangelns arean blir 1.

$$Area1 = \frac{3 \cdot (2/3)}{2} = 1$$

och därmed blir motsvarande integral

$I_1 = -1$.

Nu har linjen AP följande ekvation

$y = \frac{2}{9}(x-4)$.

På liknande sätt bestämmer vi höjden i triangeln BB_1P. Eftersom basen B_1P=5 väljer vi höjden av längden BB_1=2 så att arean (och därmed motsvarande integral) blir 5,

$$Area2 = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5.$$

Linjen genom punkterna P och B har ekvationen

$y = \frac{2}{5}(x-4)$

Vi definierar funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x-4) & för\ 1 \le x \le 4 \\ \frac{2}{5}(x-4) & för\ 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

Fuktionen $f(x)$ är kontinuerlig och satisfierar vilkor B)

9. Visa att $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < n \ln n - n + 1 < \sum_{k=2}^{n} \ln k$. Tips: betrakta integralen $\int_1^n \ln x \, dx$.

Lösning:

Först beräknar vi integralen $\int_1^n \ln x \, dx$.

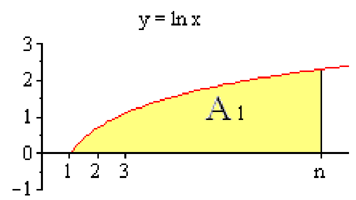
$$\int \ln x \, dx = [partiell\ integration] = x \ln x - \int 1dx = \mathrm{x} \ln x - x$$

Härav

$$\int_1^n \ln x \, dx = \mathrm{n} \ln n - n + 1$$

Funktionen $y = f(x) = \ln x$ är positiv och växande.

Talet $\int_1^n \ln x \, dx$ är lika med arean mellan grafen av $f(x)$ och x-axeln för $1 \leq x \leq n$.

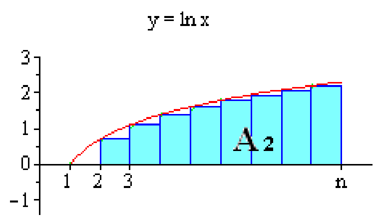


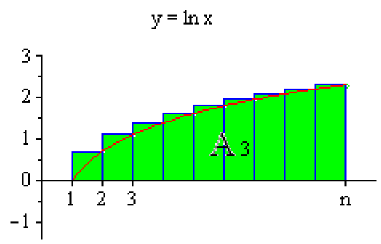
Alltså

$$A_1 = \int_1^n \ln x \, dx = \mathrm{n} \ln n - n + 1$$

Vi delar intervallet $[1, n]$ i (n-1) delintervall av med delningspunkterna 1,2,3,…,n.

Varje delintervall har längden 1.





Arean A_1 approximerar vi med underarean A_2 och överarean A_3.

Då gäller

$A_2 \leq A_1 \leq A_3$

Först beräknar vi underarean A_2 (=summan är sammanlagda arean av de rektanglarna som ligger under grafen)

$$A_2 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \cdot 1 = 1 \cdot \ln 1 + 1 \cdot \ln 2 + \cdots 1 \cdot \ln (n-1)$$

På samma sätt beräknar vi A_3

$$A_3 = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + \cdots 1 \cdot \ln n$$

Nu har vi

$A_2 \leq A_1 \leq A_3 \Rightarrow$

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots \ln (n-1) \leq \text{n} \ln n - n + 1 \quad \leq 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + \cdots 1 \cdot \ln n$$

V.S.B.

10. Finn ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$, $p'''(0) = f'''(0)$, där $f(x) = \int_0^x e^{t^2+t}\,dt$.

Lösning:

Maclaurinpolynomet av grad 3 till $f(x)$,

$$p(x) = M_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3,$$

satisvierar kravet.

Vi beräknar derivator $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f''(0)$ och $f'''(0)$:

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2+t}\,dt \quad \Rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = e^{x^2+x} \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = (2x+1)e^{x^2+x} \Rightarrow f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = 2e^{x^2+x} + (2x+1)^2 e^{x^2+x} \Rightarrow f'''(0) = 3$$

Därför

$$p(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3.$$

Svar: $p(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$