Ordinära differentialekvationer

Vi skall i dessa anteckningar ge en introduktion till ordinära differentialekvationer av första och andra ordningen. Dessa förekommer i många av matematikens tillämpningar, t.ex. inom mekanik, ekonomi, biologi, kemi etc. En av de mest välkända differentialekvationer torde vara Newtons andra lag:

$$\frac{dp(t)}{dt} = F,$$

som uttrycker sambandet mellan en partikels rörelsemängd och den kraft som påverkar partikeln. Först lite terminologi.

Definition 1. *En ordinär differentialekvation (ODE) är ett samband mellan en obekant funktion av en variabel $y = y(t)$ och dess derivator. Differentialekvationen säges vara av ordning n om den innehåller derivator av ordning n, men inte av högre ordning.*

Allmänt kan vi alltså säga att en ODE av ordning n har formen

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

där F är en funktion av $n+2$ variabler. Vi kommer här att begränsa oss till ekvationer av ordning högst 2, och dessutom bara behandla ekvationer av några speciella typer.
Med en lösning till (1) på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ menar vi en n gånger deriverbar funktion $y = y(t)$ på I sådan att $(t, y(t), y'(t), y'(t)', \ldots, y^{(n)}(t))$ tillhör definitionsmängden till F och

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0, \text{ för } t \in I.$$

Första ordningens differentialekvationer

En ODE av ordning 1 har formen $F(t, y, y') = 0$. Exempelvis så är

$$e^y + t^2 + \sin(y') = 0$$

en ODE av ordning 1. Vi behandlar två typer: sk.*linjära* och *separabla* ekvationer.

Definition 2. *En första ordningens linjär differentialekvation har formen*

$$y' + a(t)y = f(t).$$

Om $f(t) \equiv 0$ så kallas ekvationen homogen.

Definition 3. *En första ordningens separabel differentialekvation har formen*

$$g(y)y' = f(t).$$

Vi tänker oss här att funktionerna a, f, g är kontinuerliga.

Exempel

$y' - ty = t,$	separabel och linjär
$y' - ty^2 = t,$	separabel, ej linjär
$y' - ty = t^2,$	linjär, ej separabel
$e^y + t^2 + \sin(y') = 0,$	ej separabel, ej linjär.

Exempel

Den enklaste differentialekvationen (som inte är trivial) har formen

$$y'(t) = f(t)$$

vars allmäna lösning är

$$y(t) = \int f(t)dt + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Exempel

Antag att en biolog vill modellera en populations tillväxt. Man kan t.ex. tänka sig att populationen består av harar, bakterier, människor m.m. Om $n(t)$ är antalet individer i en population vid tiden t, är man intresserad av att beskriva poulationens tillväxthastighet $n'(t)$. För en första approximation kan man antaga att poulationens tillväxt är proportionell mot antalet individer, dvs.

$$n'(t) = an(t), \tag{2}$$

för någon konstant $a > 0$. Alltså har vi gjort en modell med hjälp av en differentialekvation, här en första ordningens sådan som är både linjär och separabel. Vi försöker nu att lösa (2). Om $n(t) \neq 0$, vilket vi antar, så kan vi skriva (2) som

$$\frac{n'}{n} = a.$$

Nu observerar vi att

$$\frac{n'}{n} = \frac{d}{dt}\ln(n)$$

vilket betyder att ekvationen kan skrivas

$$\frac{d}{dt}\ln(n) = a.$$

Efter integration får vi därmed

$$\ln(n(t)) = at + C$$

för någon konstant C och

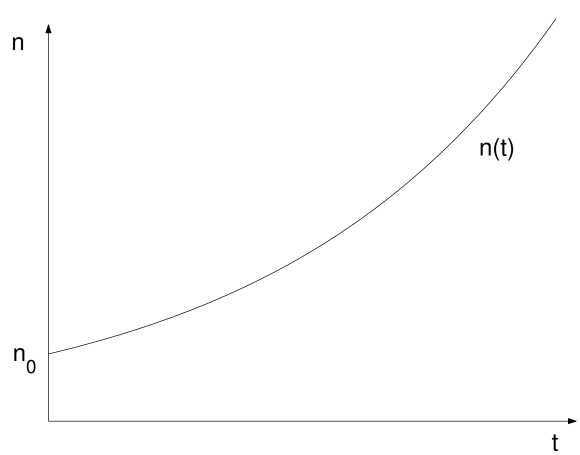
$$n(t) = e^{at+C}$$

eller

$$n(t) = Ke^{at}$$

för någon konstant $K = e^C$. Om antalet individer vid tiden $t = 0$ är $n(0) = n_0$, får vi lösningen

$$n(t) = n_0e^{at}.$$



Populationen växer exponentiellt, och detta är faktiskt en mycket bra beskrivning av en situation där det inte finns några begränsande faktorer såsom ändlig tillgång av föda, utrymme etc.

Anmärkning. Den uppmärksamme studenten oroar sig möjligtvis för det faktum att $n(t)$ nödvändigtvis är en heltalsvärd funktion, således ej kontinuerlig och definitivt inte deriverbar! Detta är sant, men vi tänker oss att populationen är "stor", så att under ett litet tidsintervall är ändringarna i populationen förhållandevis små, och vi kan då med gott samvete approximera den "sanna" populationsantalet med en deriverbar funktion $n(t)$.

En allmän lösningsmetod för första ordningens separabla ODE

Vi skall nu använda den idé som introducerades i exemplet ovan för att lösa ekvationen

$$g(y)y' = f(t). \tag{3}$$

Låt G vara en primitiv funktion till g. Kedjeregeln ger då att

$$\frac{d}{dt}G(y(t)) = G'(y(t))y'(t) = g(y(t))y'(t)$$

varför ekvationen (3) är ekvivalent med

$$\frac{d}{dt}G(y(t)) = f(t).$$

Om nu F är en primitiv funktion till f har ekvationen således den implicita lösningen

$$G(y(t)) = \int f(t)dt = F(t) + C$$

där C är en godtycklig integrationskonstant. Ibland går det att få fram en explicit formel för den obekanta funktionen y ur sambandet ovan, men ofta får man nöja sig med den implicita formen.
Formellt brukar man skriva ned sina kalkyler enligt följande mall:

$$\begin{aligned}
& g(y)\frac{dy}{dt} = f(t) \\
\Leftrightarrow\quad & g(y)dy = f(t)dt \\
\Leftrightarrow\quad & \int g(y)dy = \int f(t)dt \\
\Leftrightarrow\quad & G(y(t)) = F(t) + C.
\end{aligned}$$

Exempel

Lös ekvationen $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$.

Lösning: Ekvationen är separabel (med $g(y) = y$ och $f(t) = t$). Vi genomför kalkylerna enligt ovan:

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dt} = \frac{t}{y} \\
\Leftrightarrow\quad & y\frac{dy}{dt} = t \\
\Leftrightarrow\quad & ydy = tdt \\
\Leftrightarrow\quad & \int ydy = \int tdt \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + C.
\end{aligned}$$

Lösningarna är alltså hyperbler $y^2 - t^2 = 2C$, där C är en godtycklig konstant.

Exempel

Lös ekvationen $y' = t(y-1)$.

Lösning: Ekvationen är separabel med $g(y) = \frac{1}{y-1}$. Observera att både högerled och vänsterled blir identiskt noll om vi sätter $y(t) = 1$. En lösning till ekvationen är därför den konstanta funktionen $y(t) \equiv 1$. I ett intervall där $y(t) \neq 1$, kan vi dividera med $y-1$ och fortsätta som ovan

$$\begin{aligned} & \frac{y'}{y-1} = t \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{dy}{y-1} = \int t dt \\ \Leftrightarrow \quad & \ln|y-1| = \frac{1}{2}t^2 + C_1 \\ \Leftrightarrow \quad & |y-1| = e^{\frac{1}{2}t^2 + C_1}. \end{aligned}$$

I ett intervall där $y(t) \neq 1$ är antingen $y(t) > 1$ eller $y(t) < 1$ och vi täcker in båda alternativen med

$$y(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2} + 1,$$

där C är en godtycklig konstant. Observera att också lösningen $y(t) \equiv 1$ täcks in här om vi väljer $C = 0$.

Exempel

Vi återvänder till vår populationsmodell och försöker göra den mer realistisk. Det verkar rimligt att om populationen blir tillräckligt stor så uppstår en konkurrenssituation, t.ex. konkurrens om föda eller utrymme. Det kan vi modellera genom att modifiera ekvationen $n' = an$ till

$$\begin{cases} n' = an - bn^2, \quad t > 0 \\ n(0) = n_0 \end{cases}$$

där $0 < b << a$. Så länge som popolationen inte är alltför stor är $an - bn^2 \approx an$, och vi får tillbaka vår ursprungliga modell. Men om populationen blir tillräckligt stor dominerar den kvadratiska termen $-bn^2$ vilket begränsar tillväxten. Observera att (4) är separabel men inte linjär. Enligt ovan fås (om $0 < n < \frac{a}{b}$)

$$\begin{aligned} (4) \quad \Leftrightarrow \quad & n' = an\big(1 - \frac{b}{a}n\big) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n'}{n\big(1 - \frac{b}{a}n\big)} = a \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{dn}{n\big(1 - \frac{b}{a}n\big)} = \int a dt. \end{aligned}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int \frac{dn}{n\big(1 - \frac{b}{a}n\big)} &= \int \frac{\frac{a}{b}dn}{n\big(\frac{a}{b} - n\big)} \\ &= \int \big(\frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{a}{b} - n}\big)dn \\ &= \ln(n) - \ln\left|\frac{a}{b} - n\right| \end{aligned}$$

och således

$$\ln(n) - \ln|\frac{a}{b} - n| = at + \tilde{C}.$$

Under antagandet $0 < n_0 < \frac{a}{b}$ måste det för små tider gälla att $0 < n(t) < \frac{a}{b}$ vilket ger

$$\ln(n) - \ln(\frac{a}{b} - n) = at + \tilde{C},$$

eller

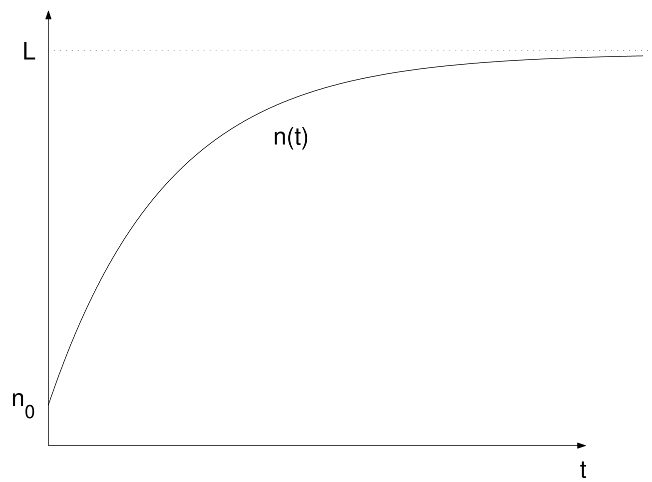
$$\ln \frac{n}{\frac{a}{b} - n} = at + \tilde{C}.$$

Här kan man lösa ut n (gör det!) och resultatet blir

$$n(t) = \frac{a}{b}\Big(1 - \frac{1}{1 + e^{at+\tilde{C}}}\Big) = \frac{a}{b}\Big(1 - \frac{1}{1 + Ce^{at}}\Big)$$

där vi i sista ledet lät $C = e^{\tilde{C}}$. Villkoret $n(0) = n_0$ ger sedan $C = \frac{n_0}{a/b - n_0}$ och med $L = \frac{a}{b}$ fås slutligen

$$n(t) = L\Big(1 - \frac{L - n_0}{Le^{at}}\Big).$$



Vi ser att $n(t) \to L$, då $t \to \infty$, oberoende av n_0, vilket uttrycker det faktum att ett slags jämvikt inträder. Modellen ovan är känd som den *logistiska lagen* och infördes av en holländare vid namn Verhulst, 1837. Man har applicerat den här modellen på jordens befolkning med lämpliga parametervärden, och funnit gränsvärdet $L =$ ca. 10 miljarder, vilket torde inträffa omkring 2030. Återstår att se om detta stämmer.

Exempel

Låt oss nu betrakta en linjär första ordningens differentialekvation, t.ex. ekvationen

$$y' + 2y = e^{-t}.$$

Om vi multiplicerar ekvationen med e^{2t} så fås den ekvivalenta ekvationen

$$e^{2t}y' + 2e^{2t} = e^{t}.$$

Produktregeln $(fg)' = f'g + fg'$ "baklänges" ger nu

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y(t)) = e^t$$

och således

$$\begin{aligned} & e^{2t}y(t) = e^t + C \\ \Leftrightarrow \quad & y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t} \end{aligned}$$

för någon konstant C. Den här idé'n skall vi nu utnyttja.

En allmän lösningsmetod för första ordningens linjära ODE

Vi betraktar alltså ekvationen

$$y' + a(t)y = f(t), \tag{4}$$

där a och f är givna kontinuerliga funktioner. Vi multiplicerar (4) med $e^{A(t)}$, där $A(t)$ är en primitiv funktion till $a(t)$ och får den ekvivalenta ekvationen

$$e^{A(t)}y' + a(t)e^{A(t)}y = e^{A(t)}f(t).$$

Observera nu att

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)}.$$

Som i exemplet ovan ger produktregeln att

$$e^{A(t)}y' + a(t)e^{A(t)}y = \frac{d}{dt}(e^{A(t)}y).$$

Alltså är (4) ekvivalent med

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}y) = e^{A(t)}f(t).$$

Men den här ekvationen kan vi enkelt lösa - integrering ger

$$e^{A(t)}y = \int e^{A(t)}f(t)dt + C$$

och slutligen

$$y(t) = e^{-A(t)}\Big(\int e^{A(t)}f(t)dt + C\Big).$$

Faktorn $e^{A(t)}$ kallas för *integrerande faktor*.

Exempel

Lös *begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{aligned} y' + 2ty &= t \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Lösning: Ekvationen är linjär, och jämförelse med den allmäna formen (4) ger $a(t) = 2t$, $f(t) = t$. Integrerande faktor blir

$$e^{\int 2tdt} = e^{t^2},$$

och ekvationen (5) kan alltså skrivas på den ekvivalenta formen

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(e^{t^2}y) = te^{t^2} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{t^2}y = \int te^{t^2} = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \\ \Leftrightarrow \quad & y(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger

$$0 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2},$$

och således

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2}).$$

Vi sammanfattar resultaten i detta avsnitt.

Sats 1. *Den linjära första ordningens differentialekvationen*

$$y' + a(t)y = f(t)$$

har den allmäna lösningen

$$y(t) = e^{-A(t)}\Big(\int e^{A(t)} f(t)dt + C\Big),$$

där $A(t)$ är en primitiv funktion till $a(t)$, och C är en godtycklig konstant.

Sats 2. *Den separabla första ordningens differentialekvationen*

$$g(y)y' = f(t)$$

har den allmäna lösningen (på implicit form)

$$G(y(t)) = F(t) + C,$$

där G, F är primitiva funktioner till g resp. f, och C är en godtycklig konstant.

Notera att lösningarna innehåller en obestämd konstant C. Detta är typiskt för första ordningens ekvationer - för att lösa dem integrerar vi en gång och då tillkommer en integrationskonstant. I konkreta fall bestäms konstanten genom att utnyttja ytterligare villkor på den sökta lösningen, t.ex. ett begynnelsevärde $y(t_0) = y_0$.

Andra ordningens differentialekvationer

Vi skall nu behandla andra ordningens linjära differentialekvationer.

Definition 4. *En andra ordningens linjär ODE har formen*

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t). \tag{6}$$

Om $a(t)$ och $b(t)$ inte beror av t säges ekvationen ha konstanta koefficienter. Om $f(t) \equiv 0$ kallas ekvationen homogen, annars inhomogen.

Vi tänker oss här att a, b, f är kontinuerliga funktioner. Varför kallas ekvationen linjär? Jo, allmänt så säges en funktion/avbildning L med definitionsmängd $\mathcal{D}_L$ vara linjär om

i) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \qquad y_1, y_2 \in \mathcal{D}_L$

ii) $L(\alpha y) = \alpha L(y), \qquad y \in \mathcal{D}_L,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Om vi nu definierar $L(y) = y'' + a(t)y' + b(t)y$, (dvs. som vänsterledet i (6)) så ser vi att L uppfyller villkoren i) och ii) ovan och således är linjär. En viktig konsekvens av detta är följande: om y_1 och y_2 är två lösningar till den *homogena* ekvationen $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, så är även alla linjärkombinationer $C_1y_1 + C_2y_2$ lösningar till samma ekvation. Det här kallas för *superpositionsprincipen*, och är en mycket viktig princip.

Linjära 2:a ordningens homogena ODE med konstanta koefficienter

Betrakta den homogena linjära differentialekvationen med konstanta koefficienter

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{7}$$

Om vi låter $y(t) = e^{rt}$ så får vi att

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r^2e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = e^{rt}(r^2 + ar + b).$$

Alltså satisfierar $y(t) = e^{rt}$ ekvationen (7) om vi kan välja r så att $r^2 + ar + b = 0$. Den här ekvationen har ju som bekant två rötter r_1, r_2 och alltså är varje funktion

$$y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

en lösning till ekvationen (7).
Följande frågor är nu naturliga:

1. Ger det här alla lösningar?
2. Tänk om r_1, r_2 komplexa? Vad är då e^{r_1t} och gäller det att $\frac{d}{dt}e^{r_1t} = r_1e^{r_1t}$?

Med anledning härav introducerar vi den komplexa exponentialfunktionen.

Definition 5. *Om $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ så är*

$$e^z = e^\alpha(\cos(\beta) + i\sin(\beta)).$$

Vi behöver också kunna derivera komplexvärda funktioner, och gör därför följande (naturliga) definition.

Definition 6. *Antag att $g(t) = u(t) + iv(t)$ där u och v är reellvärda funktioner som dessutom är deriverbara. Då är*

$$g'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Antag nu att $r = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Definitionerna ger direkt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{rt} &= \frac{d}{dt}e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\
&= \alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + e^{\alpha t}(-\beta\sin(\beta t) + i\beta\cos(\beta t)) \\
&= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\
&= re^{rt}.
\end{aligned}$$

Fråga 2. ovan har alltså fått ett svar. Hur är det med fråga 1: har alla lösningar till (7) formen $y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$? Tyvärr så är det inte fullt så enkelt. Det visar sig nämligen att fallet $r_1 = r_2$ utgör ett undantag - dock det enda. Helt klart är i alla fall att ekvationen $r^2+ar+b = 0$ spelar en avgörande roll för lösningarnas utseende.

Definition 7. *Med den karakteristiska ekvationen till den homogena differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ menar vi ekvationen*

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Vi rätar nu ut det sista frågetecknet och sammanfattar i en sats.

Sats 3. *Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och betrakta den homogena differentialekvationen*

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{8}$$

Antag att r_1 och r_2 är rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Då gäller

i) Om $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ och $r_1 \neq r_2$ så kan varje lösning till (8) skrivas

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

ii) Om $r_1 = r_2$ så kan varje lösning till (8) skrivas

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_1 t},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

iii) Om $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, där $\beta \neq 0$ så kan varje lösning till (8) skrivas

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Bevis. Genom att sätta in uttrycken för $y(t)$ i ekvationen (8) verifieras direkt att de är lösningar. Svårigheten ligger i att visa att *alla* lösningar har formen *i), ii)* eller *iii)*. Antag därför att $y(t)$ är en lösning till (8). Definiera sedan en funktion $g(t)$ genom sambandet

$$g(t)e^{r_1 t} = y(t).$$

Då är

$$y' = (g' + r_1 g)e^{r_1 t}, \text{ och } y'' = (g'' + 2r_1 g' + r_1^2 g)e^{r_1 t}.$$

Eftersom y satisfierar (8) följer det att

$$0 = y'' + ay' + b = \big(g'' + (2r_1 + a)g' + (r_1^2 + ar_1 + b)g\big)e^{r_1 t}. \tag{9}$$

Nu är $r_1^2 + ar_1 + b = 0$, och $a = -(r_1 + r_2)$ så att $2r_1 + a = r_1 - r_2$ och ekvationen (9) är ekvivalent med

$$g'' + (r_1 - r_2)g' = 0.$$

Med $h = g'$ får vi ekvationen

$$h' + (r_1 - r_2)h = 0,$$

som är en första ordningens linjär ODE, med integrerande faktor $e^{(r_1 - r_2)t}$. Följaktligen har den lösningarna

$$g'(t) = h(t) = K_1 e^{-(r_1 - r_2)t}.$$

Integration ger

$$g(t) = \begin{cases} K_2 - \frac{K_1}{r_1 - r_2} e^{-(r_1 - r_2)t}, & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ K_2 + K_1 t, & \text{om } r_1 = r_2. \end{cases}$$

Här är K_1 och K_2 godtyckliga komplexa tal. Sambandet $y(t) = e^{r_1 t} g(t)$ ger nu

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_2 t}, & \text{om } r_1 = r_2. \end{cases}$$

här är $C_1 = K_2$, $C_2 = -\frac{K_2}{r_1 - r_2}$ i det första fallet, och $C_1 = K_2$, $C_2 = K_1$ i det andra fallet. Hur som helst är C_1 och C_2 godtyckliga, och om de väljs reella så får vi lösningsfallen *i)* och *ii)*. För att visa *iii)* observerar vi att om $r_1 = \alpha + i\beta$ och $r_2 = \alpha - i\beta$ så är

$$\begin{aligned} e^{r_1 t} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\ e^{r_2 t} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)). \end{aligned}$$

Följaktligen är

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \\ &= e^{\alpha t}((C_1 + C_2)\cos(\beta t) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}(A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)), \end{aligned}$$

där $A_1 = C_1 + C_2$ och $A_2 = i(C_1 - C_2)$. Om vi endast är intreserade av reellvärda lösningar väljer vi här A_1 och A_2 reella. □

Exempel

Finn den allmäna lösningen till $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

som har rötterna $r_1 = r_2 = -2$. Enligt Sats (3) har då ekvationen den allmäna lösningen

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Exempel

Finn den allmäna lösningen till $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 4r + 5 = 0,$$

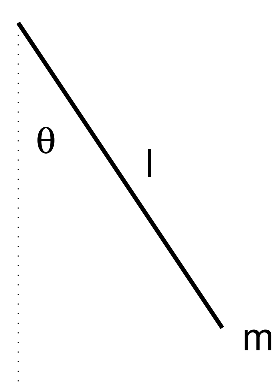
som har rötterna $r_1 = -2 + i$, $r_2 = -2 - i$. Enligt Sats (3) har då ekvationen den allmäna lösningen

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)),$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Exempel

Betrakta en pendel bestående av en punktformad massa m fäst i en viktlös stång med längden l. Låt $\theta(t)$ vara utslagsvinkeln från pendelns jämviktsläge vid tiden t, med moturs som den positiva riktningen. Massan m påverkas dels av tyngdkraften och dels av dragkraften från stången. Resultanten av dessa krafter är riktade vinkelrät mot stången, och ger upphov till pendelrörelsen.



Massan har vid tiden t hastigheten $l\theta'(t)$ och accelerationen $l\theta''(t)$. Newtons andra lag ger därför sambandet

$$ml\theta'' = -mg\sin(\theta),$$

eller, med $a = \frac{g}{l} > 0$

$$\theta'' + a\sin(\theta) = 0.$$

Ekvationen som beskriver pendelrörelsen är således en andra ordningens icke-linjär differentialekvation. Om vi förutsätter att pendelns svängningar är små, (dvs. vi betraktar små utslasvinklar θ) så kan man använda approximationen $\sin(\theta) \approx \theta$, och skriva pendelekvationen som

$$\theta'' + a\theta = 0, \tag{10}$$

vilket är en andraordningens *linjär* differentialekvation som vi kan lösa: den karakteristiska ekvationen är $r^2 + a = 0$ som har rötterna $r_1 = i\sqrt{a}$, $r_2 = -i\sqrt{a}$, (kom ihåg att $a > 0$). Den allmäna lösningen till (10) blir därför

$$\theta(t) = C_1\sin(\sqrt{a}t) + C_2\cos(\sqrt{a}t).$$

Konstanterna C_1 och C_2 blir entydigt bestämda om vi specificerar ett *begynnelsevillkor* av typen

$$\begin{cases} \theta(0) = p \\ \theta'(0) = q \end{cases}$$

Allmänt kan man lätt visa att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 & \\ y(0) = p & y'(0) = q \end{cases}$$

har en entydig lösning. Beviset består av att skriva upp den allmäna lösningen till den homogena ekvationen $y'' + ay' + b = 0$, och sedan utnyttja begynnelsevillkoren för att bestämma konstanterna C_1 och C_2. Läsaren uppmanas att skriva ned detaljerna.

Inhomogena ekvationer med konstanta koefficienter

Tack vare Sats 3 har vi fullständig kontroll över lösningarna till den homogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = 0,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$. Nu skall vi beskriva lösningarna till motsvarande inhomogena ekvation.

Sats 4. *Betrakta ekvationen*

$$y'' + ay' + by = f(t). \tag{11}$$

Antag att y_p är en lösning till (11), (en s.k. partikulärlösning), och låt y_h vara den allmäna lösningen till motsvarande homogena ekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Då ges den allmäna lösningen till (11) av $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$.

Bevis. Antag att $y(t)$ är en lösning till (11), och sätt $z(t) = y(t) - y_p(t)$. Då gäller att

$$\begin{aligned} z'' + az' + b &= y'' + ay' + b - (y_p'' + ay_p' + b) \\ &= f(t) - f(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alltså är z en lösning till den homogena ekvationen, vilket vi skulle visa.
Omvänt är det klart att att $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ är en lösning till (11). □

För att finna den allmäna lösningen till (11) räcker det alltså att finna *en* lösning y_p. Varje annan lösning y fås sedan med Sats 3 och Sats 4 som $y = y_p + y_h$, där y_h är den allmäna lösningen till den motsvarande homogena ekvationen. Hur finner man då partikulärlösningar? Det går att skriva upp en formel för ett allmänt högerled $f(t)$ (med hjälp av en s.k. fundamentallösning), men vi avstår från det. Istället behandlar vi ett par specialfall:

1. $y'' + ay' + by = p(t)$, där $p(t)$ är ett polynom av grad n.
   - $b \neq 0$: Ansätt $y_p(t) = K_0 + K_1 t + \cdots + K_n t^n$.
   - $b = 0, a \neq 0$: Ansätt $y_p(t) = t(K_0 + K_1 t + \cdots + K_n t^n)$.
   - $b = 0, a = 0$: Integrera två gånger eller ansätt $y_p(t) = t^2(K_0 + K_1 t + \cdots + K_n t^n)$.
2. $y'' + ay' + by = p(t)e^{kt}$, där $p(t)$ är ett polynom av grad n.
   Ansätt $y_p(t) = z(t)e^{kt}$. Efter insättning i ekvationen får man $z'' + cz' + dz = p(t)$, och då är man tillbaka i det första fallet.
3. $y'' + ay' + by = \cos(\beta t)$ eller $y'' + ay' + by = \sin(\beta t)$, $\beta \neq 0$.
   Sätt $r_0 = i\beta$:
   - $r_0^2 + ar_0 + b \neq 0$: Ansätt $y_p(t) = K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)$.
   - $r_0^2 + ar_0 + b = 0$: Ansätt $y_p(t) = t(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$.

Exempel

Bestäm den allmäna lösningen till $y'' + y' + y = t$.

Lösning: Motsvarande homogena ekvation är $y'' + y' + y = 0$ som har den karateristiska ekvationen $r^2 + r + 1 = 0$. Här finner vi rötterna $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ varför den allmäna lösningen till den homogena ekvationen blir

$$y_h(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2})).$$

För att finna en partikulärlösning y_p så ansätter vi (enligt fall 1 ovan) $y_p(t) = K_0 + K_1 t$. Insättning i den ursprungliga ekvationen ger

$$y'' + y' + y = 0 + K_1 + (K_0 + K_1 t) = K_1 t + K_0 + K_1 = t.$$

För att y_p skall vara en partikulärlösning måste vi alltså kräva att

$$\begin{cases} K_1 = 1 \\ K_0 + K_1 = 0, \end{cases}$$

vilket ger $K_0 = -1$, $K_1 = 1$. Alltså har vi funnit partikulärlösningen $y_p(t) = t - 1$ och den allmäna lösningen till ekvationen är enligt Sats 4

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2})) + t - 1.$$

Exempel

Bestäm den allmäna lösningen till $y'' - 5y' + 6y = (2t+1)e^{2t}$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen blir här $r^2 - 5r + 6 = 0$, som har rötterna $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Den allmäna lösningen till den homogena ekvationen $y'' - 5y' + 6y$ blir därför

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

För att finna en partikulärlösning y_p låter vi $y_p(t) = z(t)e^{2t}$, enligt fall 2 ovan. Då är $y_p' = (z' + 2z)e^{2t}$, $y_p'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2t}$ och insättning i ekvationen ger

$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = (z'' - z')e^{2t} = (2t+1)e^{2t}.$$

Alltså är y_p en partikulärlösning om z satisfierar ekvationen

$$z'' - z' = 2t + 1. \tag{12}$$

Vi ansätter därför $z(t) = t(K_0 + K_1 t) = K_0 t + K_1 t^2$. Insättning i (12) ger

$$z'' - z' = 2K_1 - K_0 - 2K_1 t = 2t + 1,$$

varav $2K_1 - K_0 = 2$, $-2K_1 = 2$, dvs. $K_0 = -3$, $K_1 = -1$. Alltså är $z(t) = t(-3-t) = -(3t+t^2)$ och det följer att

$$y_p(t) = z(t)e^{2t} = -(3t+t^2)e^{2t}$$

är en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen. Slutligen kan vi skriva upp den allmäna lösningen:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - (3t+t^2)e^{2t}.$$

Exempel

Finn en partikulärlösning till $y'' + y = \cos(t)$.

Lösning: Eftersom $r_0 = i$ är en rot till den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ ansätter vi $y_p(t) = t(K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t))$. Följaktligen,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \quad K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t) + t(-K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t)) \\ y_p''(t) &= -\quad 2K_1 \sin(t) + 2K_2 \cos(t) + t(-K_1 \cos(t) - K_2 \sin(t)), \end{aligned}$$

och ekvationen ger

$$y_p'' + y_p = -2K_1 \sin(t) + 2K_2 \cos(t) = \cos(t).$$

Vi väljer då $K_1 = 0$, $K_2 = 1/2$ och får

$$y_p(t) = \frac{1}{2} t \sin(t).$$