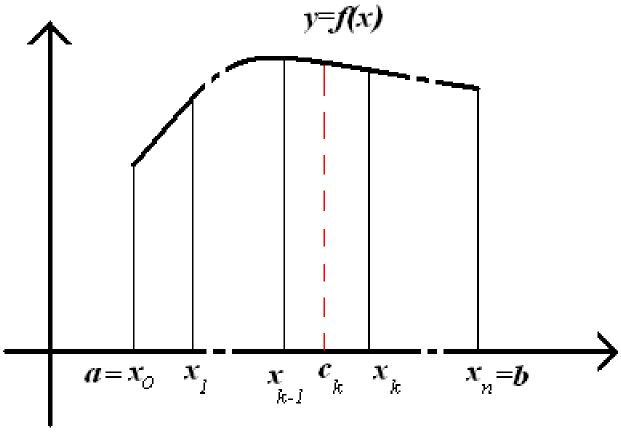
RIEMANNSUMMOR



Låt $f(x)$ vara en **begränsad** funktion, a, b **reella tal** och $a \le b$.

Den bestämda integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ definieras med hjälp av Riemannsummor

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \ \ där \ \ c_k \text{ är en godtyckligt valt punkt i intervallet } [x_{k-1}, x_k]\,;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{max|x_k - x_{k-1}| \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \right).$$

Om funktionen $f(x)$ har en elementär primitivfunktion $F(x)$ då är **insättningsformeln (Newton-Leibniz formel)**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

enklast sätt att beräkna integralen.

Om funktionen $f(x)$ saknar elementär primitiv funktion då kan vi approximera $\int_a^b f(x)\,dx$ med hjälp av Riemannsummor.

Vi använder Riemannsummor bl a för att

1. approximera integralen $\int_a^b f(x)\,dx$

2. härleda grundegenskaper för bestämda integraler

3. härleda formler som inkluderar bestämda integraler (t ex beräkning av areor, volymer och båglängder)

4. beräkna summor

…….

För att förenkla beräkning i sambad med Riemannsummor använder vi ofta indelningsintervaller med samma längd h. (**Anmärkning:** vi kan dela intervall även i t ex 2n eller 3n .. delar om det förenklar beräkning)

Om vi delar i n delintervall då är $h = \frac{b-a}{n}$ och $x_k = a + kh$.

Då är $h \to 0$ ekvivalent med $n \to \infty$.

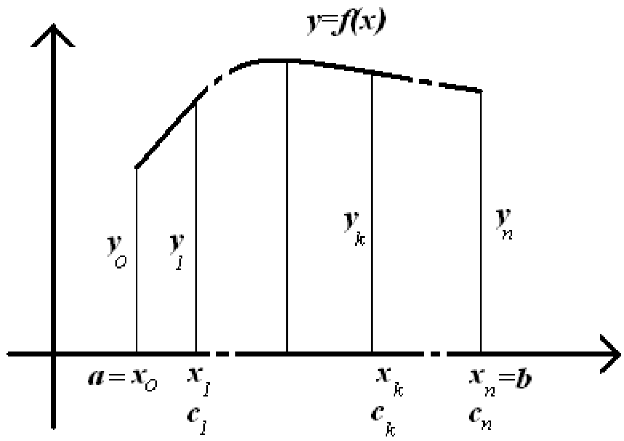
Motsvarande Riemannsumma blir då

$$S_n = h[f(c_1) + f(c_2) \dots + f(c_n)] \qquad (*)$$

och

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Vi kan även välja en punkt c_k på ett enkelt sätt: Enligt definitionen, i varje intervall $[x_{k-1}, x_k]$ väljer vi fritt en punkt c_k och beräknar funktionens värde $f(c_k)$ i denna punkt. Därför kan vi även välja för c_k en av ändpunkterna x_{k-1} eller x_k. Därmed blir $f(c_k)$ lika med y_{k-1} eller y_k.



A) Om vi t ex väljer $c_k = x_k$ då summan blir ännu enklare

$$S_H = h[y_1 + y_2 \dots + y_n] \qquad (**)$$

(Lägg märke till att y_0 finns inte i summan (**))

B) Om vi t ex väljer $c_k = x_{k-1}$ dvs $c_1 = x_0, \dots, c_n = x_{n-1}$ får vi summan

$$S_V = h[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}] \qquad (***)$$

(Lägg märke till att y_n finns inte i summan (***))

Anmärkning: Medelvärdet $\frac{S_H+S_V}{2}=\frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2 \dots+2y_{n-1}+y_n]$ kan också användas för numerisk approximation av integralen :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2 \dots+2y_{n-1}+y_n] \qquad [trapetsregeln]$$

BERÄKNING AV GRÄNSVÄRDEN MED HJÄLP AV RIEMANNSUMMOR

Några gränsvärden av typ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} g(n)\right)$$

kan beräknas med hjälp av bestämda integraler om uttrycket kan skrivas som en Riemannsumma

$S_n=h[f(c_1)+f(c_2)\dots+f(c_n)]$ där $h=\frac{b-a}{n}$ och $x_k=a+kh.$

Då är

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} g(n)\right)=\lim_{n\to\infty}(S_n)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Exempel 1.

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

Lösning:

Vi kan skriva om

$$S_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\frac{1}{1+3/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right).$$

Nu kan S_n uppfattas som en Riemannsumma $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k-x_{k-1})$ för integralen $\int_a^b f(x)\,dx$

med
$a=0, b=1,$

$h=(b-a)/n=1/n\,,$ $h\to 0$ är ekvivalent med $n\to\infty.$

$x_k=a+kh=k/n,$

$c_k = x_k = k/n$

och $f(x) = 1/(x+1)$

Därför

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = ln(1+x)|_0^1 = ln2 - ln1 = ln2$$

Svar. $ln2$

Anmärkning: Samma summa S_n kan uppfattas som Riemannsumma för integralen $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ med

$a = 1, b = 2,\ \ h = (b-a)/n = 1/n\,,$

$x_k = a + kh = 1 + k/n\,, \qquad c_k = x_k$

och $f(x) = 1/x.$

Därför

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = ln(x)|_1^2 = ln2 - ln1 = ln2.$$

Exempel 2.

Beräkna

$a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(sin\frac{\pi}{n} + sin\frac{2\pi}{n} + sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

$c)\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \frac{1}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$

$d)\ (\,modeltentamen\ 3) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2}$

Lösning:

a) Summan

$$S_n = \frac{1}{n}\left(sin\frac{\pi}{n} + sin\frac{2\pi}{n} + sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

kan uppfattas som en Riemannsumma $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ för integralen $\int_a^b f(x)\,dx$

med

$a = 0, b = 1,$

$h = (b - a)/n = 1/n \,,$

$x_k = a + kh = k/n \,,$

$c_k = x_k = k/n$

och $f(x) = sin(\pi x)$

Därför

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 sin(\pi x)\, dx = \frac{-cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{-cos(\pi)}{\pi} - \frac{-cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Svar a) $\frac{2}{\pi}$

b) Summan

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

kan uppfattas som en Riemannsumma $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ för integralen $\int_a^b f(x)\, dx$

med

$a = 0, b = 1, \quad h = (b - a)/n = 1/n \,,$

$x_k = a + kh = k/n \,, \; c_k = x_k = k/n$

och $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Därför

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)$$

Svar b) $\frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)$

c) Vi kan skriva om

$$S_n = n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \frac{1}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) \quad (\,vi\ bryter\ ut\ \frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(1/n)^2} + \frac{1}{1+(2/n)^2} + \frac{1}{1+(3/n)^2} + \cdots + \frac{1}{1+(n/n)^2}\right)$$

Nu kan S_n uppfattas som en Riemannsumma $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ för integralen $\int_a^b f(x)\, dx$

med

$a = 0, \quad b = 1,$

$h = (b-a)/n = 1/n\,,$

$x_k = a + kh = k/n\,,$

$c_k = x_k = k/n$

och $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Därför

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctanx\Big|_0^1 = arctan1 - arctan0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Svar c) $\frac{\pi}{4}$

d) Summan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

kan uppfattas som en Riemannsumma $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ för integralen $\int_a^b f(x)\,dx$

med

$a = 0, b = 1,$

$h = (b-a)/n = 1/n\,,$

$x_k = a + kh = k/n\,,$

$c_k = x_k = k/n$

och $f(x) = 1 - x$

Därför

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Svar d) $\frac{1}{2}$

UPPSKATNING AV INTEGRALER MED HJÄLP AV TVÅ RIEMANNSUMMOR

Om vi betraktar en funktion $f(x)$ som är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ då antar funktionen sitt minsta värde m_k och sin största värde M_k i varje sluten intervall $[x_{k-1}, x_k]$. Därför kan vi approximera integralen med både en "**undersumma**"

$$S_{min} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

och en "**översumma**"

$$S_{max} = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Med andra ord: Vi kan approximera integralen från båda sidor

$$S_{min} \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_{max}$$

Om f(x) är monoton (växande eller avtagande) då antar funktionen sina största och minsta värden i $[x_{k-1}, x_k]$ i intervallets ändpunkter.

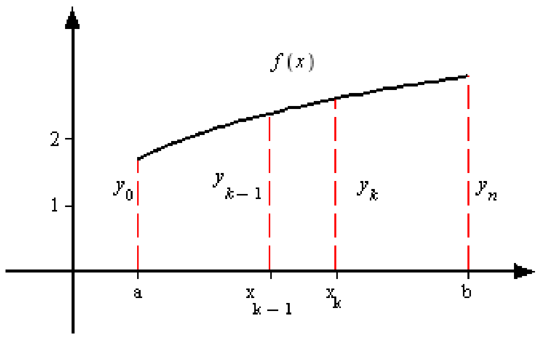
i) Om $f(x)$ är växande i [a, b] och h=(b-a)/n då

$m_k = y_{k-1}$ och $M_k = y_k$

$S_{min} = S_V = h[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$,

$S_{max} = S_H = h[y_1 + y_2 \ldots + y_n]$, och

$$S_V \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_H$$



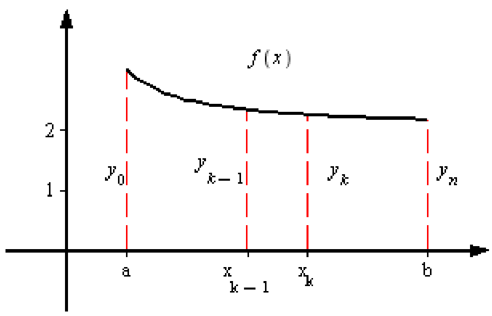
ii) Om $f(x)$ är avtagande i [a, b] och h=(b-a)/n då

$M_k = y_{k-1}$ och $m_k = y_k$

$S_{max} = S_V = h[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$,

$S_{min} = S_H = h[y_1 + y_2 \ldots + y_n]$, och

$$S_H \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_V$$



Exempel 3. **(Modeltentamen 1, uppgift 9)**

Visa att

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \quad < n \ \ln n - n \ + 1 < \sum_{k=2}^{n} \ln k$$

Tips: Betrakta integralen: $\int_1^t \ln x \, dx$.

Lösning:

Först beräknar vi integralen $\int_1^n \ln x \, dx$.

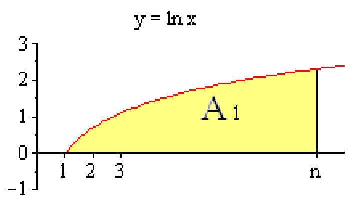
$$\int \ln x \, dx = [partiell\ integration] \ = x \ln x - \int 1dx \ = \mathrm{x} \ln x - x$$

Härav

$\int_1^n \ln x \, dx = \mathrm{n} \ln n - n + 1$

Funktionen $y = f(x) = \ln x$ är positiv och växande.

Talet $\int_1^n \ln x \, dx$ är lika med arean mellan grafen av $f(x)$ och x-axeln för $1 \le x \le n$.

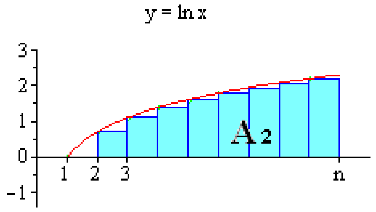


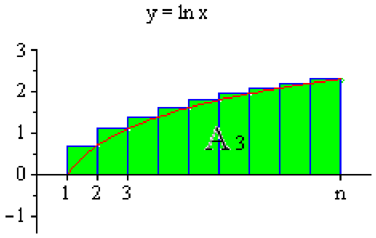
Alltså

$$A_1 = \int_1^n \ln x \, dx = \mathrm{n} \ln n - n + 1$$

Vi delar intervallet $[1, n]$ i (n-1) delintervall av med delningspunkterna 1,2,3,…,n.

Varje delintervall har längden 1.





Arean A_1 approximerar vi med underarean A_2 och överarean A_3.

Då gäller

$A_2 < A_1 < A_3$

Först beräknar vi underarean A_2 (=summan är sammanlagda arean av de rektanglarna som ligger under grafen)

$$A_2 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \cdot 1 = 1 \cdot \ln 1 + 1 \cdot \ln 2 + \cdots 1 \cdot \ln (n-1)$$

På samma sätt beräknar vi A_3

$$A_3 = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + \cdots 1 \cdot \ln n$$

Nu har vi

$A_2 < A_1 < A_3 \Rightarrow$

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots \ln (n-1) < \mathrm{n} \ln n - n + 1 \quad < \; 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + \cdots 1 \cdot \ln n$$

V.S.B.

BERÄKNING AV $\int_a^b f(x)\, dx$ MED HJÄLP AV INTEGRALENS DEFINITION OCH RIEMANNSUMMOR

Exempel 4. Visa med hjälp av Riemannsummor och integralens definition

(alltså **utan** användning av isättnings formel) att

$$\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

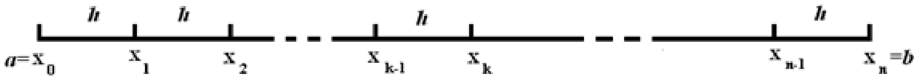
(***Tips:*** Du kan använda följande formel för aritmetiska summan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

Lösning: Vi delar intervallet [a,b]=[0,1] i n delintervall med samma längd

$$h = \frac{(1-0)}{n} = \frac{1}{n}$$

Alltså har vi följande indelning

$$D:\ \ a = 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < \ x_{k-1} < x_k \ < \cdots < x_n = 1 = b$$



Därför

$$x_1 = a + h = 0 + h$$

$$x_2 = a + 2h = 0 + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_{k-1} = a + (k-1)h = 0 + (k-1)h$$

$$x_k = a + kh = 0 + kh$$

$$\vdots$$

$$x_n = a + nh = 0 + nh$$

Vi betraktar Riemannsumman

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(\,x_k - x_{k-1})$$

för funktionen f(x)=x och väljer $c_k = x_k = kh$. Därför $f(c_k) = c_k = hk$.

Vi har:

(lägg märke till att $x_k - x_{k-1} = h$)

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(\,x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} kh \cdot h = h^2 \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Eftersom $h \to 0$ är ekvivalent med $n \to \infty$ har vi

$$\int_0^1 x\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}(Sn) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \qquad V.S.B.$$

Exempel 5. **KS 2 , feb 2010 , uppgift 3.** Visa med hjälp av Riemannsummor och integralens definition (alltså utan användning av isättnings formel) att

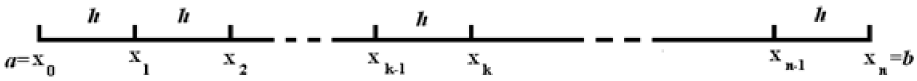
$$\int_3^5 e^x\,dx = e^5 - e^3.$$

Lösning: Vi delar intervallet [a,b]=[3,5] i n delintervall med samma längd

$$h = \frac{(5-3)}{n} = \frac{2}{n}$$

Alltså har vi följande indelning

$$D:\ \ a = 3 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = 5 = b$$



Därför

$$x_1 = a + h = 3 + h$$

$$x_2 = a + 2h = 3 + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_{k-1} = a + (k-1)h = 3 + (k-1)h$$

$$x_k = a + kh = 3 + kh$$

$$\vdots$$

$$x_n = a + nh = 3 + nh$$

Vi betraktar Riemannsumman

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

för funktionen e^xoch väljer $c_k = x_{k-1} = 3 + (k-1)h.$

Vi har:

(lägg märke till att $x_k - x_{k-1} = h$)

$$Sn = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(\,x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e^{c_k} \cdot h = h\sum_{k=1}^{n} e^{3+(k-1)h} = he^3 \sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)h}$$

$$= he^3 \sum_{k=1}^{n} \left(e^h\right)^{k-1} = he^3 \left[\left(e^h\right)^0 + \left(e^h\right)^1 + \left(e^h\right)^2 + \cdots + \left(e^h\right)^{n-1}\right]$$

Vi använder formeln för geometrisk summa och får

$$Sn = he^3 \frac{\left(e^h\right)^n - 1}{e^h - 1} = e^3 \frac{h}{e^h - 1}\left[\left(e^h\right)^n - 1\right]$$

Eftersom

$$\int_3^5 e^x\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{max|x_k - x_{k-1}| \to 0} (Sn)$$

beräknar vi gränsvärdet av Sn då h går mot 0 (eller ekvivalent, då n går mot ∞) :

i) Vi vet att $\frac{h}{e^h - 1} \to 1 \; då \; h \to 0$ (standardgränsvärde eller l'Hospitals regel)

ii) $\left(e^h\right)^n - 1 = \left(e^{2/n}\right)^n - 1 = e^2$

Härav

$$Sn = e^3 \frac{h}{e^h - 1}\left[\left(e^h\right)^n - 1\right] \to e^3 \cdot 1 \cdot [e^2 - 1] = e^5 - e^3 \quad V.S.B.$$