Dag 17. Taylors formel

Rekommenderade uppgifter

4.8.2 Bestäm Taylorpolynomet till $\cos x$ av grad 3 kring punkten $x = \pi/4$.

Taylors formel säger att

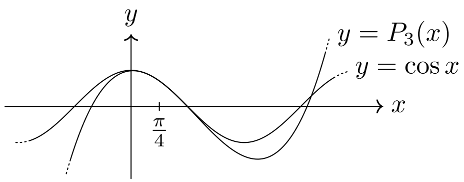
$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3,$$

där $a = \pi/4$. Vi behöver alltså beräkna

$$\begin{aligned}
f(\pi/4) &= \cos\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
f'(\pi/4) &= \frac{d}{dx}\cos x\Big|_{x=\pi/4} = -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\
f''(\pi/4) &= \frac{d}{dx} - \sin x\Big|_{x=\pi/4} = -\cos\tfrac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\
f'''(\pi/4) &= \frac{d}{dx} - \cos x\Big|_{x=\pi/4} = \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Vi får att

$$P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(x-\tfrac{1}{4}\pi)^3\Big).$$



4.8.7 Bestäm Taylorpolynomet av grad n till $\frac{1}{2+x}$ kring punkten $x = 1$.

För att bestämma Taylorpolynomet av grad n kring $x = 1$ behöver vi bestämma derivatorna

$$f'(1),\quad f''(1),\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(1)\quad \text{och}\quad f^{(n)}(1).$$

Med ett induktivt resonemang får vi att

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\,k!}{(2+x)^{k+1}}.$$

I punkten $x = 1$ fås speciellt

$$f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^k\,k!}{3^{k+1}}.$$

Taylorpolynomet blir

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n\\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-1) + \frac{1}{3^3}(x-1)^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n.
\end{aligned}$$

4.8.10 Använd Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 64$ för att approximera $\sqrt{61}$. Skatta felet och skriv upp det minsta intervall som säkert innehåller det sanna värdet.

Taylors formel av grad 2 kring $x = a$ lyder

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

där ξ ligger mellan a och x. I vårt fall är

$$f(x) = \sqrt{x}\quad \text{och}\quad a = 64.$$

så vi behöver först bestämma

$$\begin{aligned}
f(64) &= \sqrt{64} = 8,\\
f'(64) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x}\,\bigg|_{x=64} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=64} = \frac{1}{16},\\
f''(64) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=64} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=64} = -\frac{1}{2048},\\
f'''(\xi) &= \frac{d}{dx} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=\xi} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=\xi} = \frac{3}{8\xi^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\sqrt{x} = 8 + \tfrac{1}{16}(x-64) - \tfrac{1}{4096}(x-64)^2 + \frac{1}{16\xi^{5/2}}(x-64)^3.$$

Om vi sätter $x = 61$ och ignorerar resttermen så får vi approximationen

$$\sqrt{61} \approx 8 + \tfrac{1}{16}(61-64) - \tfrac{1}{4096}(61-64)^2 \approx 7{,}81030.$$

Istället för att göra en noggrann undersökning av resttermens tecken och dess storlek gör vi en ganska grov skattning. Vi vet att $61 < \xi < 64$ och därför är

$$|R_3(61)| = \left|\frac{1}{16\cdot\xi^{5/2}}\cdot(-3)^3\right| < \frac{1}{16\cdot 61^{5/2}}\cdot 3^3 < \frac{1}{16\cdot 61^2\cdot\sqrt{49}}\cdot 3^3 \lessapprox 6{,}48\cdot 10^{-5}.$$

Vi kan därför säga att

$$\sqrt{61} \in (7{,}81030 - 6{,}48\cdot 10^{-5};\ 7{,}81030 + 6{,}48\cdot 10^{-5}) \approx (7{,}81023;\ 7{,}81037).$$

Detta kan jämföras med det sanna värdet

$$\sqrt{61} = 7{,}81024967\ldots$$

Anm. Om termerna har alternerande tecken i Taylorserien kan man visa att felet alltid är mindre än beloppet av den först försummade termen (se sats 9.4.15, sid 549).

4.8.12 Använd Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \arctan x$ kring punkten $x = 1$ för att approximera $\arctan 0{,}97$. Skatta felet och skriv upp det minsta intervall som säkert innehåller det sanna värdet.

Taylors formel av grad 2 kring $x = a$ lyder

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

där ξ ligger mellan a och x. I vårt fall med $f(x) = \arctan x$ och $a = 1$ är

$$\begin{aligned}
f(1) &= \pi/4,\\
f'(1) &= \frac{d}{dx}\arctan x\,\bigg|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}\,\bigg|_{x=1} = 1/2,\\
f''(1) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}\,\bigg|_{x=1} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,\bigg|_{x=1} = -1/2,\\
f'''(\xi) &= \frac{d}{dx}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,\bigg|_{x=1} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\,\bigg|_{x=\xi} = \frac{2(3\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^3}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\arctan x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{3\xi^2-1}{(\xi^2+1)^3}(x-1)^3.$$

Om vi sätter $x = 0{,}97$ och ignorerar resttermen så får vi approximationen

$$\arctan 0{,}97 \approx \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(0{,}97-1) - \tfrac{1}{4}(0{,}97-1)^2 \approx 0{,}77017.$$

I feltermen vet vi att $0{,}97 < \xi < 1$, varför vi kan skatta feltermen till

$$|R_3(0{,}97)| = \left|\frac{1}{3}\frac{3\xi^2-1}{(\xi^2+1)^3}\cdot 0{,}03^3\right| < \frac{1}{3}\frac{3\cdot 1^2-1}{(0{,}97^2+1)^3}\cdot 0{,}03^3 \lessapprox 2{,}47\cdot 10^{-6}.$$

Vi kan därför säga att

$$\begin{aligned}
\arctan 0{,}97 &\in (0{,}770173 - 2{,}47\cdot 10^{-6};\ 0{,}770173 + 2{,}47\cdot 10^{-6})\\
&\approx (0{,}770170;\ 0{,}770176).
\end{aligned}$$

Detta kan jämföras med det sanna värdet

$$\arctan 0{,}97 = 0{,}770170914\cdots$$

4.8.22 Bestäm Taylorpolynomet $P_8(x)$ till e^{-x^2} kring punkten $x = 0$.

Taylorutvecklingen för e^x kring $x = 0$ lyder

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^5).$$

Om vi ersätter x med $-x^2$ i formeln ovan får vi att

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{24}x^8 + O(x^{10}).$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_8(x) = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{24}x^8.$$

4.8.24 Bestäm Taylorpolynomet $P_5(x)$ till $\sin x$ kring punkten $x = \pi$.

Vi skriver om funktionen med hjälp av trigonometriska formler

$$\sin x = \sin\big((x-\pi)+\pi\big) = \sin(x-\pi)\cdot\cos\pi + \cos(x-\pi)\cdot\sin\pi = -\sin(x-\pi).$$

Sätter vi $s = x - \pi$ ska vi alltså Taylorutveckla $-\sin s$ kring $s = 0$,

$$\begin{aligned}\sin x = -\sin s &= -\Big(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + O(s^7)\Big)\\ &= -(x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3 - \tfrac{1}{120}(x-\pi)^5 + O(x-\pi)^7.\end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_5(x) = -(x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3 - \tfrac{1}{120}(x-\pi)^5.$$

4.8.33 Vilken är den bästa 2:a gradsapproximationen till $f(x) = (x-1)^2$ kring $x = 0$? Hur stort är felet i denna approximation?

Besvara samma frågor för $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Kan konstanten $\frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$ i resttermen för andragradsapproximationen förbättras (göras mindre)?

Eftersom f kan skrivas som

$$f(x) = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2 + O(x^3)$$

ger entydighetssatsen för Taylorpolynom att Taylorpolynomet $P_2(x)$ till f är

$$P_2(x) = 1 - 2x + x^2.$$

Eftersom $P_2(x) = f(x)$ är felet 0.

Funktionen g kan skrivas som

$$g(x) = 4 + 3x + 2x^2 + O(x^3).$$

Taylorutvecklingens unikhet ger att Taylorpolynomet $P_2(x)$ till g är

$$P_2(x) = 4 + 3x + 2x^2.$$

Resttermen i Taylorutvecklingen är

$$R_3(x) = \frac{g'''(\xi)}{3!}(x-0)^3.$$

Eftersom $g'''(x) \equiv 6$ blir restermen

$$R_3(x) = x^3.$$

Vi ska jämföra detta med det exakta felet

$$g(x) - R_3(x) = x^3.$$

Resttermen $R_3(x)$ är alltså lika med det exakta felet, och då finns inte rum för någon förbättring av feluppskattningen.

Extrauppgifter

X.1 Bestäm Taylorpolynomet $P_3(x)$ till $e^x \cos x$ kring punkten punkten $x = 0$.

Antag att vi vet Taylorutvecklingen av e^x och $\cos x$ i $x = 0$,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4), \\ \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4). \end{aligned}$$

Då är

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \Bigl(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\Bigr)\Bigl(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\Bigr) \\ &= \bigl\{x^n O(x^m) = O(x^{m+n});\ O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})\bigr\} \\ &= 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_3(x) = 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3.$$

X.2 Visa att $\sin x = O(x)$ då $x \to 0$.

Vi ska visa att det finns ett $C > 0$ så att

$$|\sin x| \le C|x| \quad \text{för alla } x \text{ i en punkterad omgivning av } 0. \tag{$*$}$$

Eftersom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

så vet vi från gränsvärdesdefinitionen att

$$1 - \varepsilon \le \frac{\sin x}{x} \le 1 + \varepsilon \quad \text{för alla } x \text{ i en punkterad omgivning av } 0,$$

vilket ger speciellt att

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1 + \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sin x| \le (1+\varepsilon)|x|$$

i en punkterad omgivning av 0. Därmed har vi visat $(*)$.

Anm. Alltså duger $C = 1 + \varepsilon$ som konstant, men omgivningens storlek får vi inte fram med ovanstående resonemang. Vi vet iallafall att det finns en omgivning där $(*)$ är uppfylld, och det räcker i denna uppgift.

X.3 Visa att $e^x = 1 + x + O(x^2)$ då $x \to 0$.

Om vi Taylorutvecklar e^x i punkten $x = 0$ får vi

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}e^{\xi}x^2,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Eftersom $x \mapsto e^x$ är en växande funktion så är resttermen

$$\left|\tfrac{1}{2}e^{\xi}x^2\right| \le \tfrac{1}{2}e^{\max\{0,x\}} \cdot |x^2| \le \tfrac{1}{2}e^1 \cdot |x^2| \qquad \text{för alla } |x| < 1.$$

Alltså är resttermen $O(x^2)$ och vi kan skriva

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \quad \text{då } x \to 0.$$

Anm. Egentligen räcker det med att konstatera att $\frac{1}{2}e^{\xi}$ är begränsad för ξ nära 0.

X.4 Är $e^x = O(x^{10})$ då $x \to \infty$?

Vi ska undersöka om det finns ett $C > 0$ och ett $N > 0$ så att

$$|e^x| < C|x^{10}| \quad \text{för alla } x > N. \tag{$*$}$$

Om detta vore sant skulle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}} \le \lim_{x\to\infty} C = C < \infty.$$

Men eftersom vi vet att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = \infty,$$

så kan inte $(*)$ vara uppfylld, d.v.s.

$$e^x \ne O(x^{10}) \quad \text{då } x \to \infty.$$

X.5 Visa att

$$\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)^x = ex^x + O(x^{x-1}) \quad \text{då } x \to \infty.$$

I varje steg använder vi antingen räknereglerna för ordo, Maclaurinutveckling eller en vanlig omskrivning, så fundera noga över varje likhet.

$$\begin{aligned}
\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)^x &= \exp\Big(x\log\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)\Big)\\
&= \exp\Big(x\log x + x\log\big(1+\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(x\log\big(1+\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(x\big(\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(1+O(\tfrac{1}{x})\Big) = x^x\cdot\exp(1)\cdot\exp\Big(O(\tfrac{1}{x})\Big)\\
&= ex^x\Big(1+O(\tfrac{1}{x})\Big) = ex^x + O(x^{x-1}).
\end{aligned}$$