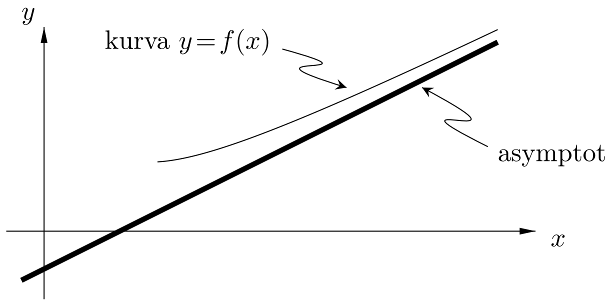
Asymptoter

LCB ht 2008

(ersätter avsnitt 2.5.1 i Persson-Böiers)

Betrakta en funktion f definierad för $x \geq x_0$. Vi är intresserade av att ge en lite mer precis beskrivning av funktionens uppförande för stora x än att bara säga att gränsvärdet existerar eller inte existerar. Mer precist vill vi undersöka om funktionskurvan $y = f(x)$ ansluter väl till någon linje $y = ax + b$ för stora x. Se figuren.



Vi inför följande terminologi.

Definition 1. *En rät linje $y = ax + b$ kallas **asymptot** till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$ om*

$$f(x) - (ax + b) \to 0 \qquad \text{då} \quad x \to \infty.$$

På motsvarande sätt talar man om en asymptot då $x \to -\infty$.

Beteckna skillnaden $f(x) - (ax + b)$ med $g(x)$. Att linjen $y = ax + b$ är asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$ innebär tydligen att vi kan skriva

$$f(x) = ax + b + g(x) \tag{1}$$

där $g(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

Exempel 1. Vi vill undersöka funktionen $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x}$. Differensen $g(x)$ ovan är

$$g(x) = \frac{2x + 3}{x} - (ax + b) = -ax + (2 - b) + \frac{3}{x}.$$

Det är klart att $\dfrac{3}{x} \to 0$ då $x \to \infty$. Vi får tydligen gränsvärdet 0 om och endast om $a = 0$ och $b = 2$. Slutsatsen blir att linjen $y = 0 \cdot x + 2$, dvs. $y = 2$, är asymptot till kurvan.

Vi kunde naturligtvis ha insett detta snabbare genom en polynomdivision. En sådan ger ju att

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x},$$

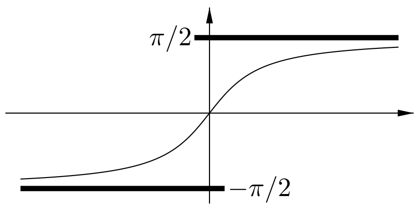
svarande mot omskrivningen (1) ovan. $\square$

Exempel 2. Kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, har asymptoten $y = 0$ (x-axeln), eftersom

$$\frac{1}{x} - (0 \cdot x + 0) \to 0 \qquad \text{då} \quad x \to \infty.$$

$\square$

Exempel 3. Kurvan $y = \arctan x$ har asymptoterna $y = \dfrac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$ och $y = -\dfrac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$. $\square$



I själva verket är det naturligtvis så att så snart f har ett gränsvärde b då $x \to \infty$ är linjen $y = b$ asymptot. Man kallar sådana asymptoter **vågräta**. Begreppet asymptot är mer intressant när det blir fråga om en linje med riktningskoefficient skild från noll.

Exempel 4. Betrakta kurvan

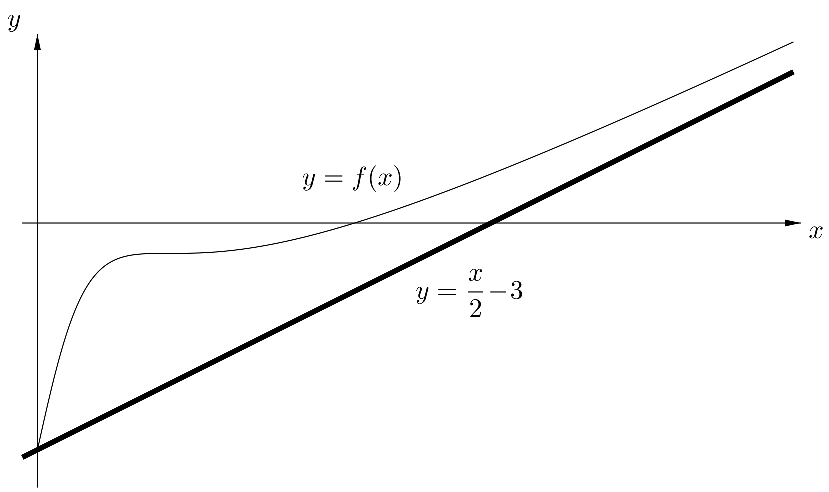
$$y = f(x) = \frac{x}{2} - 3 + \frac{4x}{x^2+1}.$$

Denna har formen (1) med $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -3$ och

$$g(x) = \frac{4x}{x^2+1} = \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Vi ser att $g(x) \to 0$ när $x \to \infty$. Linjen $y = \dfrac{x}{2} - 3$ är alltså asymptot.

Kurvan har för $x > 0$ följande utseende:



$\square$

Exempel 5. Bestäm eventuella asymptoter i ∞ och $-\infty$ till kurvan $y = f(x)$ om

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2}.$$

Lösning: Efter polynomdivision får vi att

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x^2 - 2}.$$

På samma sätt som i exempel 4 ser vi att linjen $y = x + 2$ är asymptot då $x \to \infty$.

Undersöker vi vad som händer då $x \to -\infty$ får vi samma resultat; linjen $y = x + 2$ är asymptot. $\square$

Exempel 6. En skenbart obetydlig modifiering av funktionen f i exempel 5 till

$$f_2(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2}$$

leder efter polynomdivision till

$$f_2(x) = x^2 + 4 - \frac{2x - 6}{x^2 - 2}.$$

Man ser lätt (förkorta med nämnarens dominerande term) att $\frac{2x-6}{x^2-2} \to 0$ då $x \to \infty$. Kurvan $y = f_2(x)$ närmar sig alltså parabeln $y = x^2 + 4$ då $x \to \infty$. Den kan därmed inte närma sig någon rät linje.

Vi får samma resultat i $-\infty$. Kurvan saknar asymptoter. □

Anmärkning. Ibland tillåter man sig att i situationer som denna kalla $y = x^2 + 4$ för en *asympototkurva*. Vi använder dock inte denna terminologi här.

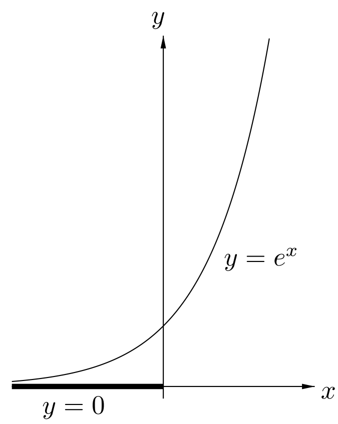
I exempel 5 är samma linje asymptot såväl i ∞ som i $-\infty$. Exempel 3 visar att det inte alltid behöver vara så. Det kan till och med inträffa att en kurva har asymptot i det ena fallet men inte i det andra. Detta illustreras av nästa exempel.

Exempel 7. Kurvan $y = e^x$ har asymptoten $y = 0$ då $x \to -\infty$ eftersom $e^x \to 0$ då.

Fallet $x \to \infty$ är annorlunda. En eventuell asymptot $y = ax+b$ skulle ju uppfylla villkoret att

$$e^x - (ax + b) \to 0 \qquad \text{då} \quad x \to \infty.$$

Men detta är orimligt, eftersom ett standardgränsvärde utsäger att e^x växer snabbare än varje potens av x då $x \to \infty$. □



Exempel 8. I annat sammanhang har en *hyperbel* definierats som en kurva som i ett lämpligt koordinatsystem har en ekvation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

där a och b är positiva tal. Ersätter man höger led i (2) med 0 får man en kurva som kan skrivas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}\,x \\ \text{eller} \\ y = -\dfrac{b}{a}\,x. \end{cases}$$

Den geometriska betydelsen är tydligen två räta linjer. Dessa brukar kallas för *hyperbelns asymptoter*. Vi ska nu se att det finns fog för denna benämning.

Genom att dela upp i de två fallen $y < 0$ och $y > 0$ kan vi i (2) lösa ut y som funktion av x. Vi får därmed två funktionskurvor, för vilka vi kan undersöka om definitionen av asymptot är uppfylld. I själva verket är ju ekvationen (2) symmetrisk med avseende på såväl x som y, så det räcker att göra räkningarna i första kvadranten. För $x > 0$ och $y > 0$ är (2) ekvivalent med att

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \qquad x \geq a. \tag{3}$$

Vi ska visa att linjen

$$y = \frac{b}{a}\,x$$

är asymptot till denna kurva då $x \to +\infty$. Enligt definitionen behöver vi visa att

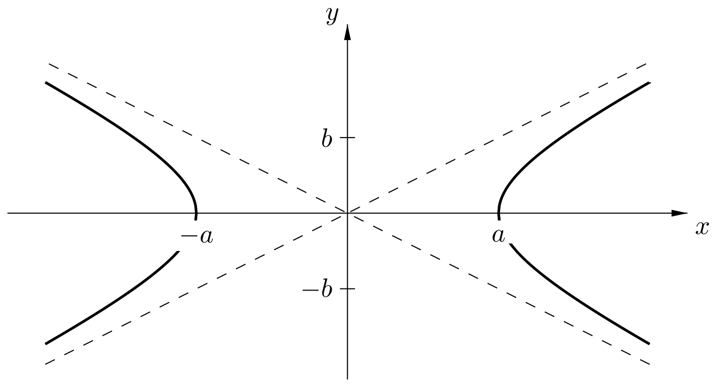
$$g(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \;-\; \frac{b}{a}\,x \;\to\; 0 \qquad \text{då} \quad x \to \infty.$$

Förlänger man med konjugatuttrycket får man

$$g(x) = \frac{\dfrac{b^2}{a^2}\,x^2 - b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}\,x^2}{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} \;+\; \dfrac{b}{a}\,x} \;=\; -\frac{b^2}{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} \;+\; \dfrac{b}{a}\,x}.$$

Här syns det tydligt att $g(x)$ har gränsvärdet 0 då $x \to \infty$. Därmed har vi visat att $y = \dfrac{b}{a}\,x$ är asymptot till kurvan (3) i första kvadranten.

Undersökning av hyperbeln i de andra kvadranterna leder av symmetriskäl till motsvarande resultat. Vi har alltså bevisat att hyperbeln, uppfattad som fyra funktionskurvor, har de två linjerna $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$ som asymptoter. När man ska rita en hyperbel är det alltid fördelaktigt att först rita dessa. Då har man ett stöd för att rita kurvan långt borta; den ska ju närma sig asymptoterna.



□

Anmärkning. Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ går mot ∞ då $x \to 2$. Man säger i denna situation ibland att linjen $x = 2$ är *lodrät asymptot* till kurvan $y = f(x)$. Observera att det inte är tillräckligt för detta att nämnaren är noll då $x = 2$. Detta gäller ju också för $g(x) = \dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2}$, men denna funktion kan skrivas om till $g(x) = x - 2$ och har alltså en hävbar diskontinuitet i 2. — I båda dessa fall säger man att funktionen har en *singularitet* i $x = 2$.