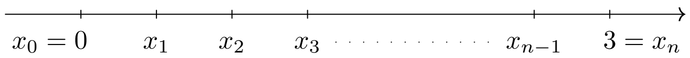
Dag 11. Riemannsummor och integraler

Rekommenderade uppgifter

5.2.2 Dela upp intervallet $[0,3]$ i lika stora delintervall och använd rektanglar med dessa delintervall som bas för att beräkna arean av området under $y = 2x+1$, över $y = 0$, samt mellan $x = 0$ och $x = 3$.

Vi delar först upp intervallet $[0,3]$ i n st delintervall med lika längder.

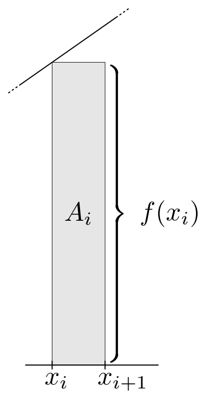


Från den förra uppgiften får vi ett uttryck för delintervallens ändpunkter,

$$x_i = 0 + i \cdot \frac{3-0}{n} = \frac{3i}{n}.$$

Om vi låter arean av delrektangeln, med (x_i, x_{i+1}) som bas, betecknas med A_i, då är

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i).$$



Eftersom vi har ett explicit uttryck för x_i och x_{i+1} så kan vi även ställa upp ett explicit uttryck för A_i,

$$\begin{aligned} A_i &= \Big(\frac{3(i+1)}{n} - \frac{3i}{n}\Big) \cdot \Big(2 \cdot \frac{3i}{n} + 1\Big) \\ &= \frac{3}{n} \cdot \Big(\frac{6i}{n} + 1\Big) = \frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Områdets exakta area A kan vi approximera med summan av delrektanglarnas area,

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}\Big) \\ &= \frac{18}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{3}{n} \cdot n = 9\,\frac{n-1}{n} + 3. \end{aligned}$$

Om vi låter antalet delrektanglar n öka så borde vi få en allt bättre approximation av den verkliga arean A. I gränsfallet $n \to \infty$ får vi den exakta arean,

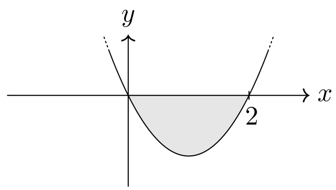
$$A = \lim_{n\to\infty} \Big(3 + 9\,\frac{n-1}{n}\Big) = 3 + 9 = 12.$$

5.2.10 Dela upp ett intervall i lika stora delintervall och använd rektanglar med dessa delintervall som bas för att beräkna arean av området över $y = x^2 - 2x$ och under $y = 0$.

Låt oss först rita upp området. Funktionen $y = x^2 - 2x$ är en typisk andragradsfunktion. Genom att kvadratkomplettera får vi att

$$y = (x-1)^2 - 1.$$

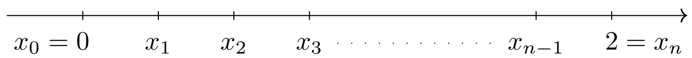
I detta uttryck ser vi direkt att minimum finns i $x = 1$ där $y = -1$ och att $y \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Ritar vi upp grafen har den en typisk parabelform



Vi söker arean av det gråfärgade området ovan. Området begränsas i x-led av de två x-värdena där kurvan $y = x^2 - 2x$ skär $y = 0$, d.v.s.

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$

Vi delar upp x-intervallet $[0,2]$ i n st delintervall med lika längder.



Ett uttryck för delintervallens ändpunkter $\{x_i\}$ är

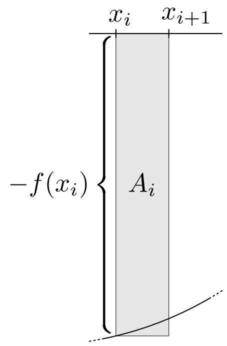
$$x_i = 0 + i \cdot \frac{2-0}{n} = \frac{2i}{n}.$$

Om vi låter A_i beteckna arean av den delrektangel med (x_i, x_{i+1}) som bas, då är

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot \bigl(-f(x_i)\bigr).$$

Ett explicit uttryck för A_i är

$$\begin{aligned} A_i &= \Bigl((i+1)\frac{2}{n} - \frac{2i}{n}\Bigr) \cdot \Bigl(-\Bigl(\frac{2i}{n}\Bigr)^2 + 2\,\frac{2i}{n}\Bigr) \\ &= \frac{2}{n}\Bigl(\frac{4i}{n} - i^2\frac{4}{n^2}\Bigr). \end{aligned}$$



Områdets exakta area A approximerar vi med summan av delrektanglarnas area,

$$\begin{aligned} A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot \Bigl(\frac{4i}{n} - i^2\frac{4}{n^2}\Bigr) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Bigl(-i(i-1)\frac{4}{n^2} + \Bigl(\frac{4}{n} - \frac{4}{n^2}\Bigr)i\Bigr) \\ &= -\frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i(i-1) + \Bigl(\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}\Bigr)\sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= -\frac{8}{n^3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \Bigl(\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}\Bigr)\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3n^2}. \end{aligned}$$

När vi låter antalet delrektanglar $n \to \infty$ får vi den exakta arean

$$A = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\frac{4}{3} - \frac{4}{3n^2}\Bigr) = \frac{4}{3}.$$

5.3.2 Låt P_n vara partitionen av intervallet $[0,4]$ i n st delintervall med lika längd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Beräkna $L(f,P_4)$ och $U(f,P_4)$ för $f(x) = x^2$.

Under- och översumman är

$$L(f,P_4) = \sum_{i=0}^{3} m_i \Delta x_i,$$

$$U(f,P_4) = \sum_{i=0}^{3} M_i \Delta x_i,$$

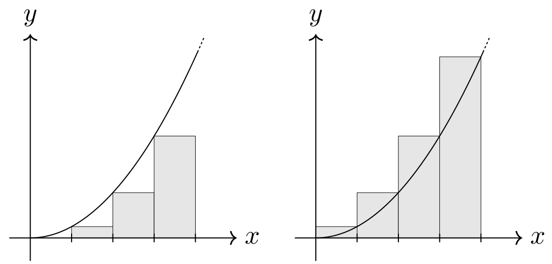
där m_i och M_i är f:s minsta respektive största värde i de olika delintervallen $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ och $[3,4]$.

Eftersom $f(x) = x^2$ är strängt växande i $[0,4]$ antas m_i och M_i i delintervallens vänstra respektive högra ändpunkter. Vi får

$$\begin{aligned} m_0 &= f(0) = 0 & m_2 &= f(2) = 4 \\ M_0 &= f(1) = 1 & M_2 &= f(3) = 9 \\ m_1 &= f(1) = 1 & m_3 &= f(3) = 9 \\ M_1 &= f(2) = 4 & M_3 &= f(4) = 16 \end{aligned}$$

och summorna blir

$$L(f,P_4) = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 9\cdot 1 = 14$$
$$U(f,P_4) = 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 9\cdot 1 + 16\cdot 1 = 30$$



$L(f,P_4)$ $U(f,P_4)$

5.3.10 Låt P_n vara partitionen av intervallet $[0,4]$ i n st delintervall med lika längd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Beräkna $L(f,P_n)$ och $U(f,P_n)$ för $f(x) = e^x$.
Visa att

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

Därmed är f integrerbar i $[0,3]$. Varför? Vad är $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$?

Under- och översumman är

$$L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

$$U(f,P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

där m_i och M_i är f:s minsta respektive största värde i de olika delintervallen. Eftersom $f(x) = e^x$ är en strängt växande funktion antas m_i och M_i i delintervallens vänstra respektive högra ändpunkter. Ändpunkterna är $x_i = 0 + i\frac{3-0}{n} = \frac{3i}{n}$ så vi får

$$\begin{aligned} m_i &= f(x_i) = \exp\Big(\frac{3i}{n}\Big), \\ M_i &= f(x_{i+1}) = \exp\Big((i+1)\,\frac{3}{n}\Big) = \exp\Big(\frac{3i}{n} + \frac{3}{n}\Big) = m_i\, e^{3/n}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \exp\Big(\frac{3i}{n}\Big) \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big(e^{3/n}\big)^i \\ &= \{\text{geometrisk serie}\} = \frac{3}{n}\,\frac{1-(e^{3/n})^n}{1-e^{3/n}} = \frac{3}{n}\,\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i e^{3/n} \cdot \frac{3}{n} \\ &= e^{3/n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, \frac{3}{n} = e^{3/n} L(f,P_n). \end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ fås att

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\,\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}} = \frac{3(1-e^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} n(1-e^{3/n})} \\ &= \{\text{Maclaurinutveckling}\} = \frac{3(1-e^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} n\big(1-(1+\frac{3}{n}+O(\frac{1}{n^2}))\big)} \\ &= \frac{3(1-e^3)}{\lim_{n\to\infty}\big(-3+O(\frac{1}{n})\big)} = e^3 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{3/n} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} e^{3/n} \cdot \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \\ &= 1 \cdot (e^3 - 1) = e^3 - 1. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = e^3 - 1.$$

Om vi går tillbaka till definitionen av integral så ser vi att f är integrabel i $[0,3]$ om det finns exakt ett tal I så att

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

för alla partitioner P. I vårt fall låter vi

$$I = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

$L(f,P) \le I$: Eftersom en översumma alltid är större än en undersumma, är

$$L(f,P) \le U(f,P_n).$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$L(f,P) \le I.$$

$U(f,P) \ge I$: På samma sätt är

$$U(f,P) \ge L(f,P_n).$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$U(f,P) \ge I.$$

I unik: Gapet mellan alla över- och undersummor måste alltid ligga i intervallet

$$[L(f,P_n), U(f,P_n)] \qquad \text{för alla } n.$$

Eftersom ändpunkterna i detta intervall konvergerar mot I, är gapet exakt en punkt I.

Vi får därmed att f är integrabel i $[0,3]$ och

$$\int_0^3 e^x\,dx = I = e^3 - 1.$$

5.3.12 Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

som en bestämd integral.

Dela upp intervallet $[0,1]$ i n st delintervall med lika längd $\frac{1}{n}$. I varje delintervall $\big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\big]$ väljer vi en punkt $c_k = k/n$. Då är Riemannsumman av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ lika med

$$R(f,P_n,c) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \left\{\begin{matrix} \text{indexbyte} \\ i = k+1 \\ k = i-1 \end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}.$$

Eftersom partitionens finhet går mot noll är

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, P_n, c) = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx,$$

d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

5.4.4 Beräkna integralen

$$\int_0^2 (3x+1)\, dx$$

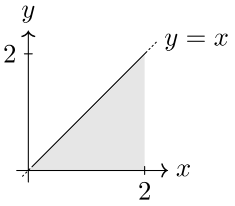
genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

$$\int_0^2 (3x+1)\, dx = 3\underbrace{\int_0^2 x\, dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_0^2 1\, dx}_{\text{II}}.$$

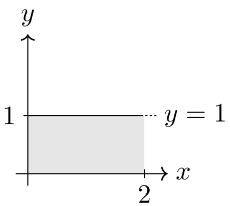
Vi undersöker de två integralerna i högerledet var för sig.

I Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



area $= \frac{1}{2} \cdot$ basen $\cdot$ höjden $= 2$

II Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



area $=$ basen $\cdot$ höjden $= 2$

Alltså är

$$\int_0^2 (3x+1)\, dx = 3\cdot 2 + 2 = 8.$$

5.4.10 Beräkna integralen

$$\int_{-a}^{a} (a - |s|)\, ds$$

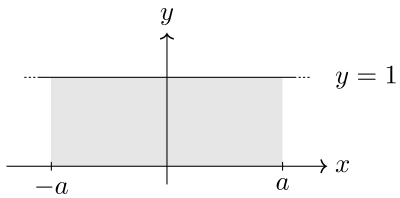
genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Låt oss för enkelhets skull anta att $a \geq 0$. Linjäriteten ger att

$$\int_{-a}^{a} (a-|s|)\, ds = a\underbrace{\int_{-a}^{a} 1\, ds}_{\text{I}} - \underbrace{\int_{-a}^{a} |s|\, ds}_{\text{II}}.$$

Vi undersöker de två integralerna var för sig.

I Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



area $=$ basen $\cdot$ höjden $= 2a$

Alltså är $\text{I} = 2a$.

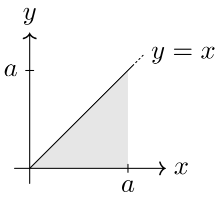
II Sätt $f(s) = |s|$. Vi har att

$$f(-s) = |-s| = |s| = f(s).$$

d.v.s. f är en jämn funktion, och då är

$$\text{II} = 2\int_0^a |s|\, ds = \{|s| = s \text{ för } s \geq 0\} = 2\int_0^a s\, ds.$$

Integralen i högerledet har samma värde som arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



area $= \frac{1}{2} \cdot \text{basen} \cdot \text{höjden} = a^2/2$

Alltså är $\text{II} = a^2$.

Sammantaget får vi att

$$\int_{-a}^{a} (a - |s|)\, ds = a \cdot \text{I} - \text{II} = 2a^2 - a^2 = a^2.$$

Anm. Om $a < 0$ blir svaret $3a^2$.

5.4.11 Beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\, du$$

genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\, du = \underbrace{\int_{-1}^{1} u^5\, du}_{\text{I}} - 3\underbrace{\int_{-1}^{1} u^3\, du}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \pi\, du}_{\text{III}}$$

Vi undersöker integralerna var för sig.

I Om vi sätter $f(u) = u^5$ så noterar vi att

$$f(-u) = (-u)^5 = -u^5 = -f(u),$$

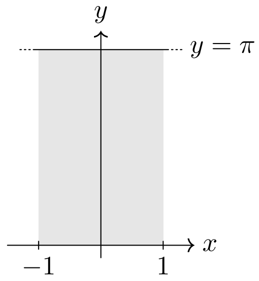
d.v.s. integranden är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

II Med $f(u) = u^3$ noterar vi att

$$f(-u) = (-u)^3 = -u^3 = -f(u),$$

d.v.s. integranden är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

III Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



area $= 2 \cdot \pi = 2\pi$

Alltså är $\text{III} = 2\pi$.

Sammantaget är det bara den tredje integralen som ger ett bidrag

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\, du = \text{I} - 3 \cdot \text{II} + \text{III} = 2\pi.$$

5.4.14 Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{3} (2+t)\sqrt{9-t^2}\, dt$$

genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

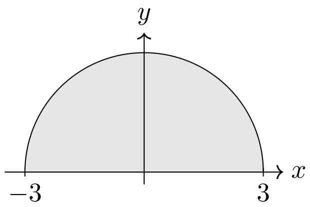
$$\int_{-3}^{3} (2+t)\sqrt{9-t^2}\, dt = 2\underbrace{\int_{-3}^{3} \sqrt{9-t^2}\, dt}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{-3}^{3} t\sqrt{9-t^2}\, dt}_{\text{II}}.$$

Vi behandlar integralerna i högerledet separat.

I Om vi kvadrerar funktionen $y = \sqrt{9 - x^2}$ får vi

$$y^2 = 9 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Vår funktion beskriver alltså övre delen av en cirkel med radie 3 och mittpunkt i origo. Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \text{radie}^2 = \tfrac{9}{2}\pi$$

Alltså är $\mathrm{I} = \frac{9}{2}\pi$.

II Sätt $f(t) = t\sqrt{9 - t^2}$. Vi har att

$$f(-t) = (-t)\sqrt{9 - (-t)^2} = -t\sqrt{9 - t^2} = -f(t),$$

d.v.s. integranden är en udda funktion. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen 0.

Sammantaget är

$$\int_{-3}^{3} (2 + t)\sqrt{9 - t^2}\, dt = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} = 2 \cdot \tfrac{9}{2}\pi + 0 = 9\pi.$$

5.4.22 Givet att $\int_0^a x^2\, dx = a^3/3$, beräkna

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx.$$

Linjäriteten ger att

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx = 2\underbrace{\int_{-6}^{6} x^2\, dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{-6}^{6} x^2 \sin x\, dx}_{\mathrm{II}}.$$

Vi beräknar de två integralerna i högerledet separat.

I Sätt $f(x) = x^2$. Vi har då att

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

d.v.s. integranden är jämn. Vi får att

$$\mathrm{I} = 2\int_0^6 x^2\, dx.$$

Med formeln i uppgiftstexten får vi att

$$\mathrm{I} = 2 \cdot 6^3/3 = 144.$$

II Sätt $f(x) = x^2 \sin x$. Vi har att

$$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2(-\sin x) = -x^2 \sin x = -f(x),$$

d.v.s. funktionen är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

Sammantaget är

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} = 2 \cdot 144 + 0 = 288.$$

5.4.28 Finn medelvärdet av $g(x) = x + 2$ i intervallet $[a, b]$.

Medelvärdet ges av integralen

$$\hat{g} = \frac{1}{b - a}\int_a^b g(x)\, dx = \frac{1}{b - a}\int_a^b (x + 2)\, dx.$$

Linjäriteten ger att

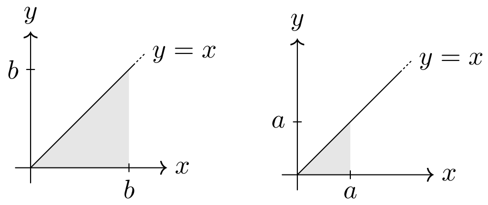
$$\hat{g} = \frac{1}{b - a}\underbrace{\int_a^b x\, dx}_{\mathrm{I}} + \frac{2}{b - a}\underbrace{\int_a^b dx}_{\mathrm{II}}.$$

Vi behandlar de två integralerna separat.

I Vi kan skriva om integralen som

$$\int_a^b x\,dx = \left[\int_0^b - \int_0^a\right] x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx.$$

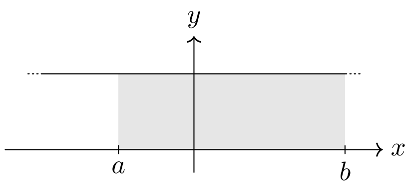
De två integralerna i högerledet har samma värde som arean av respektive triangel i figuren nedan.



Alltså är

$$\text{I} = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

II Integralens värde är arean av det gråfärgade området nedan.



area $= (b-a)\cdot 1 = b-a$

Alltså är

$$\text{II} = b - a.$$

Medelvärdet är alltså

$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\cdot \text{I} + \frac{2}{b-a}\cdot \text{II} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} + \frac{2(b-a)}{b-a} = \frac{a+b}{2} + 2.$$

5.5.2 Beräkna $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

Vi vet att

$$\frac{d}{dx}x^{3/2} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Alltså är

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right) = \sqrt{x}.$$

Detta visar att $\frac{2}{3}x^{3/2}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$. Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\tfrac{2}{3}\sqrt{x}\right]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \tfrac{2}{3}\cdot 0\sqrt{0} = 16/3.$$

5.5.4 Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$.

En primitiv funktion till $x^{-2} - x^{-3}$ är

$$\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx &= \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1}\\ &= -\frac{1}{(-1)} + \frac{1}{2\cdot(-1)^2} - \left(-\frac{1}{(-2)} + \frac{1}{2\cdot(-2)^2}\right)\\ &= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}.\end{aligned}$$

5.5.8 Beräkna $\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$

En primitiv funktion till $x^{1/2} - x^{-1/2}$ är

$$\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\begin{aligned}\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \Big[\,\tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\,\Big]_4^9 \\ &= \tfrac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9} - 2\cdot\sqrt{9} - \left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - 2\cdot\sqrt{4}\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\cdot 9\cdot 3 - 2\cdot 3 - \left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 2\right) \\ &= 18 - 6 - \tfrac{16}{3} + 4 = 32/3.\end{aligned}$$

5.5.14 Beräkna $\int_{-2}^{2} (e^x - e^{-x})\, dx.$

En primitiv funktion till $e^x - e^{-x}$ är

$$e^x - \frac{e^{-x}}{-1} = e^x + e^{-x}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-2}^{2} (e^x - e^{-x})\, dx = \Big[\,e^x + e^{-x}\,\Big]_{-2}^{2} = e^2 + e^{-2} - (e^{-2} + e^2) = 0.$$

Anm. Alternativt kan man lägga märke till att integranden är udda och att integrationsintervallet är origosymmetriskt, varför integralen är noll.

5.5.16 Beräkna $\int_{-1}^{1} 2^x\, dx.$

Vi har att

$$\frac{d}{dx}2^x = 2^x\cdot\log 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\log 2}\right) = 2^x.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-1}^{1} 2^x\, dx = \left[\,\frac{2^x}{\log 2}\,\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\log 2} - \frac{2^{-1}}{\log 2} = \frac{3/2}{\log 2}.$$

5.5.18 Beräkna $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Vi erinrar oss att

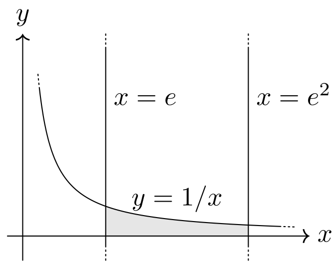
$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\,\arcsin x\,\Big]_0^{1/2} = \arcsin\tfrac{1}{2} - \arcsin 0 = \pi/6.$$

5.5.22 Beräkna arean av området som begränsas av $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$ och $x = e^2$.

Vi ritar först upp en skiss av hur området ser ut

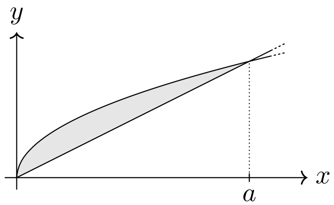


Arean av området ges av integralen

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_e^{e^2} = \log e^2 - \log e = 2\log e - \log e = \log e = 1.$$

5.5.26 Beräkna arean av området under $y = \sqrt{x}$ och över $y = x/2$.

Vi ritar en skiss av området.



Områdets area ges av integralen

$$\int_0^a \big(\sqrt{x} - x/2\big)\,dx,$$

där a är x-koordinaten för den punkt i området som är längst till höger, d.v.s. x-koordinaten för skärningspunkten mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = x/2$. Låt oss först bestämma a innan vi ger oss på att beräkna integralen.

I punkten $x = a$ ska kurvorna ha samma y-koordinat, d.v.s.

$$\sqrt{a} = a/2. \tag{$*$}$$

Vi kvadrerar.

$$a = a^2/4 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-4) = 0.$$

Vi ser att $a = 4$ är den lösning vi söker. Eftersom vi som första steg kvadrerade ekvationen finns risken att vi introducerade falska rötter. Vi kontrollerar därför att $a = 4$ verkligen är en riktig lösning till $(*)$.

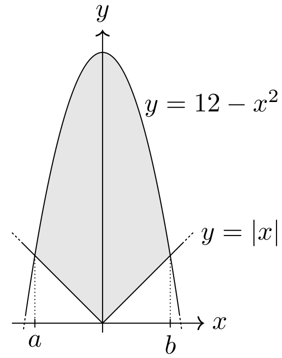
$$\text{VL av } (*) = \sqrt{4} = 2,$$
$$\text{HL av } (*) = 4/2 = 2.$$

Områdets area är alltså

$$\int_0^4 \big(\sqrt{x} - x/2\big)\,dx = \Big[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - x^2/4\Big]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - 4^2/4 - \big(0-0\big) = 4/3.$$

5.5.28 Beräkna arean av området över $y = |x|$ och under $y = 12 - x^2$.

Vi ritar först en skiss av området.



Områdets area ges av integralen

$$\int_a^b \big(12 - x^2 - |x|\big)\,dx,$$

där a och b är x-koordinater för skärningspunkterna mellan $y = |x|$ och $y = 12 - x^2$. Eftersom $y = |x|$ är definierad av två olika uttryck för $x < 0$ resp. $x > 0$ undersöker vi dessa intervall separat.

$x < 0$: I detta intervall är $y = |x| = -x$. Skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen

$$12 - x^2 = -x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x - 12 = 0.$$

Denna andragradare har lösningarna

$$x = 4 \quad \text{och} \quad x = -3.$$

Eftersom endast negativa x ingår i detta intervall är skärningspunktens x-koordinat $a = -3$.

$x > 0$: I detta intervall är $y = |x| = x$. Skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen

$$12 - x^2 = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x - 12 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna

$$x = 3 \quad \text{och} \quad x = -4.$$

Vi är bara intresserade av positiva x, så skärningspunkten är $b = 3$.

Områdets area ges alltså av integralen

$$\int_{-3}^{3} \big(12 - x^2 - |x|\big)\, dx.$$

Notera att integranden är en jämn funktion, så integralens värde är lika med

$$\begin{aligned} 2\int_0^3 \big(12 - x^2 - |x|\big)\, dx &= 2\int_0^3 \big(12 - x^2 - x\big)\, dx \\ &= 2\Big[\, 12x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 \,\Big]_0^3 = 2\Big(12\cdot 3 - \tfrac{1}{3}\cdot 3^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 3^2 - \big(0-0-0\big)\Big) = 45. \end{aligned}$$

5.5.36 Finn medelvärdet av $f(x) = e^{3x}$ i intervallet $[-2, 2]$.

Medelvärdet ges av integralen

$$\bar{f} = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{3x}\, dx.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{3x}\, dx = \frac{1}{4}\Big[\, \tfrac{1}{3}e^{3x} \,\Big]_{-2}^{2} = \frac{e^6 - e^{-6}}{12}.$$

5.5.40 Bestäm $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Om vi låter $F(x)$ beteckna en primitiv funktion till $\dfrac{\sin x}{x}$, då är

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{d}{dt}\big(F(3) - F(t)\big) = -F'(t).$$

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F'(t) = \frac{\sin t}{t},$$

varför vi får att

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\sin t}{t}.$$

5.5.44 Bestäm $\dfrac{d}{d\theta}\displaystyle\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx$.

Om $F(x)$ betecknar en primitiv funktion till $\dfrac{1}{1-x^2}$, då är

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx &= \frac{d}{d\theta}\big(F(\cos\theta) - F(\sin\theta)\big) \\ &= F'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) - F'(\sin\theta)\cdot\cos\theta. \end{aligned}$$

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

varför vi har att

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx &= \frac{1}{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta) - \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta \\ &= \frac{-\sin\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}. \end{aligned}$$