Viktiga begrepp och resultat - Derivator

- Begreppet deriverbarhet:

  En funktion f är deriverbar i en punkt $x_0 \in D_f$ om f är definierad i en omgivning av x_0 och om gränsvärdet

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  existerar som ett ändligt tal. Detta tal betecknas då med $f'(x_0)$. Även beteckningarna $Df(x_0)$, och $\frac{df(x_0)}{dx}$ är vanliga. Om f är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd så säger vi helt enkelt att f är deriverbar.

- Tolkning av derivatan: $f'(x)$ är ett mått på funktionens tillväxthastighet i punkten x, (Differenskvoten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ är *medelförändringen* av f på intervallet $[x, x+h]$.) Geometriskt, så är $f'(p)$ riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(p, f(p))$. En ekvation för denna tangent blir alltså $y - f(p) = f'(p)(x - p)$.

- **Sats:** *Om f är deriverbar så är f kontinuerlig.* (Observera att omvändningen är falsk).

- **Derivationsregler:** *Om f och g är deriverbara funktioner och α, β godtyckliga konstanter så gäller att*

  1. $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
  2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

- **Sats:** (Kedjeregeln) *Antag att funktionen g är deriverbar i x och att funktionen f är deriverbar i $g(x)$. Då är den sammansatta funktionen $f \circ g$ deriverbar i x med*

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

  Med Leibniz beteckningar: Om $y = y(u(x))$ så är

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- **Sats:** *Antag att funktionen f har en invers funktion som är kontinuerlig. Om f är deriverbar i x med $f'(x) \neq 0$ så är f^{-1} deriverbar i $y = f(x)$ med*

  $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=f^{-1}(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

  Med Leibniz beteckningar: Om $y = f(x)$ så är $x = f^{-1}(y)$ och

  $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

- De elementära funktionernas derivator:

  1. $D(x^r) = rx^{r-1}$
  2. $D(e^x) = e^x$
     $D(a^x) = a^x \ln a$
  3. $D(\ln x) = \frac{1}{x}$
     $D({}^a\log x = \frac{1}{x \ln a})$
  4. $D(\sin x) = \cos x$
     $D(\cos x) = -\sin x$
     $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
  5. $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
     $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
     $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

- Om $f(x)$ är sådan att också $f'(x)$ är deriverbar, så skriver vi

$$Df'(x) = D^2 f(x) = f''(x)$$

  Med Leibniz beteckningar: Om $y = f(x)$ så är

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

  Analogt definieras högre ordningens derivator.

- *En funktion f har lokalt minimum i $x_0 \in D_f$ om det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att*

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

  Vi säger då att x_0 är en lokal minimipunkt för f, och funktionsvärdet $f(x_0)$ är ett lokalt minimivärde. Lokal maximipunkt definieras analogt.

- *Lokala maximi- och minimipunkter kallas för lokala extrempunkter. Motsvarande funktionsvärden kallas för extremvärden.*

- *Vi säger att en punkt x_0 är en inre punkt i mängden A om $x_0 \in A$ och om det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in A$.*

- **Sats:** *Om funktionen f har ett lokalt extremvärde i en inre punkt $x_0 \in D_f$ och om f är deriverbar i x_0 så är x_0 en stationär punkt, dvs. $f'(x_0) = 0$.*

- **Medelvärdessatsen:** *Antag att funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$. Då finns minst en punkt $\xi \in]a, b[$ sådan att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

- **Sats:** *Om funktionen f är deriverbar på $]a, b[$ med $f'(x) = 0$ för alla $x \in]a, b[$ så följer att funktionen f är en konstant funktion.* (Observera att omvändningen är trivialt sann).

- **Sats:** *Om funktionen f är deriverbar på $]a, b[$ med $f'(x) > 0$ för alla $x \in]a, b[$ så är f strängt växande på $]a, b[$. Om dessutom f är kontinuerlig i ändpunkterna a och b är funktionen strängt växande på $[a, b]$.*

- **Följdsats:** *Om $f'(x) \geq 0$ i ett intervall och om likhet endast inträffar i ett ändligt antal punkter så är f strängt växande i intervallet.*