Viktiga begrepp och resultat - Tillämpningar av differentialkalkylen

- Att rita kurvan $y = f(x)$:

  i) Beräkna (och faktorisera) $f'(x)$

  ii) Gör en teckenstudie av $f'(x)$ i en tabell där du tar med stationära punkter, (dvs. nollställen till f'), singulära punkter (där f' ej existerar) och eventuella ändpunkter (även punkter som inte ingår i D_f). Skriv in i tabellen var f växer resp. avtar.

  iii) Beräkna eventuella asymptoter till funktionen f. Man kan också behöva beräkna ett gränsvärde av typen $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x)$ där $a \notin D_f$ (t.ex om $D_f =]a, b[$).

  iv) Skissa sedan grafen med ledning av informationen ovan.

Exempel: Rita kurvan $y = \frac{x^2+x+2}{x-1}$.

Lösning: $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$ ger

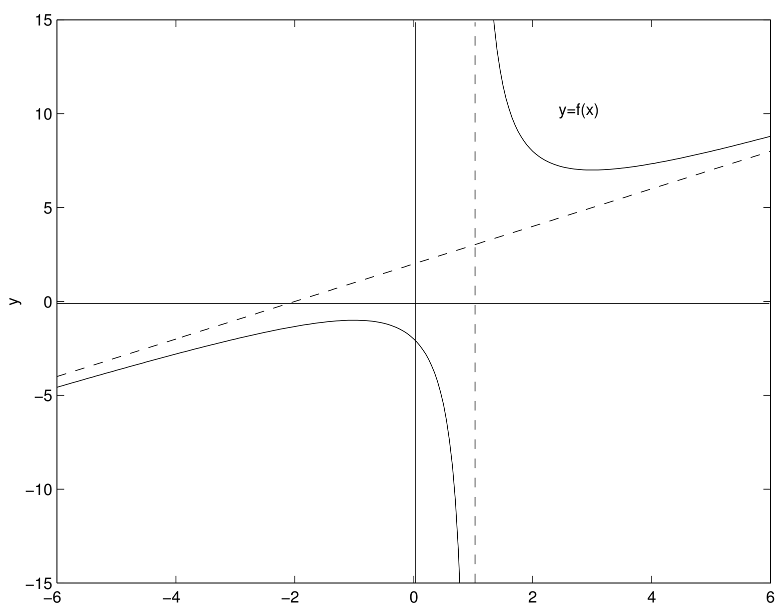
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2},$$

för $x \neq 1$. Vi ser att $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 3$ dvs. de stationära punkterna är $x = -1$ och $x = 3$. Vidare så är $x = 1$ en singulär punkt, som dessutom inte tillhör D_f. Teckenstudie:

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\bowtie$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$\bowtie$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$

Tabellen ger att $x = -1$ är en lokal maximipunkt och $x = 3$ är en lokal minimipunkt. Asymptoter: Vi får $\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ och alltså är linjen $x = 1$ en lodrät asymptot.

Om vi utför en polynomdivision; $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1} = x + 2 + \frac{4}{x-1}$ så ser vi med en gång att linjen $y = x + 2$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$. Nu kan vi rita:



- Extrempunkter. Om x_0 är en extrempunkt, dvs. en lokal maximi- eller minimipunkt, så är x_0 antingen

    1) en stationär punkt (dvs. $f'(x_0) = 0$),
    2) en ändpunkt i D_f, eller
    3) en singulär punkt (dvs. f är ej deriverbar i x_0).

  Observera att om x_0 är en stationär punkt så kan man oftast avgöra om det är en maximi- eller minimipunkt genom att studera derivatans teckenväxling kring x_0.

- Maximera/minimera en funktion $x \mapsto f(x)$, där x tillhör någon mängd I. Samma analys som vid uppritande av funktionskurvan $y = f(x)$ ger automatiskt information om eventuella största/minsta värde till f. Ibland kan det vara enklare att utnyttja följande existenssats:

  > *Om funktionen f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[a.b]$ så antar f ett största och ett minsta värde där.*

  Om vi söker max/min av en kontinuerlig funktion f på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ ger satsen ovan existensen av extrempunkter på detta intervall. Vi behöver då bara ta reda på de olika möjliga extrempunkterna , dvs. stationära punkter, singulära punkter och ändpunkterna a och b, för att sedan jämföra funktionens värden i dessa punkter. Observera förutsättningarna i denna sats - kontinuitet och ett intervall av formen $[a, b]$. Om vi släpper på en av dessa förutsättningar är satsen falsk.

  Exempel: Bestäm det största värdet av $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0, 2]$.

  Lösning: f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0, 2]$ och antar därmed ett största värde där. Möjliga extrempunkter är (eftersom f deriverbar överallt) stationära punkter och ändpunkterna 0 och 2. Vi får $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, så den enda stationära punkten är $x = 1$. Möjliga kandidater till största värde är därför $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1}$, och $f(2) = 2e^{-2}$. Vi ser att $f_{max} = f(1) = e^{-1}$.

- Att visa en olikhet av typen $g(x) < h(x)$, $x \in I$ görs enklast genom att studera funktionen $f(x) = h(x) - g(x)$, $x \in I$. Med metoder enligt ovan kan man oftast visa att $f(x) > 0$ för $x \in I$, vilket är ekvivalent med den ursprungliga olikheten.
  Ett vanligt fall är att man vill visa att $f(x) > 0$ för $x > a$ (dvs. $I =]a, \infty[$). Om vi kan visa att $f'(x) > 0$ för $x > a$ så vet vi att funktionen är strängt växande för $x > a$. Om dessutom (vilket vanligen är fallet) f är kontinuerlig på $[a, \infty[$ så är f strängt växande för $x \geq a$ vilket ger att $f(x) > f(a)$ för $x > a$. Allt som återstår är att verifera att $f(a) \geq 0$.

  Exempel: Visa att $\arctan x < x$ för $x > 0$.

  Lösning: Låt $f(x) = x - \arctan x$. Vi vill visa att $f(x) > 0$ för $x > 0$. Vi får $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$ om $x > 0$, vilket medför att f är strängt växande på $]0, \infty$. Men f är kontinuerlig i $x = 0$ och alltså är f strängt växande på $[0, \infty[$. Om $x > 0$ gäller då att $f(x) > f(0) = 0$ och vi är klara.