Några tillämpade exempel ur teorin av diffential ekvationer.

Vi skall nu avslutningsvis studera några tillämpade exempel där den matematiska modellen eller beskrivningen av ett skeende ges av en differentialekvation. I allmänhet beskriver D.E förändringen av skeendet medan lösningen ger en matematisk beskrivning av skeendets tillstånd i varje bestämt ögonblick. Att man går denna omväg beror på att förändringen oftast är lättast att beskriva matematiskt.

Ex.1 (Newtons avsvalningslag)

Ett föremål med temperaturen T är nedsänkt i en vätska med konstant temperatur T_1 för att avsvalna, $(T > T_1)$.

Temperaturens förändring ΔT, kan då antas vara direkt proportionell mot temperturskillnaden $T - T_1$ (= Newtons avsvalningslag) och mot tiden Δt d.v.s $\Delta T = - k(t - T_1)\Delta t$. Detta ger

$$\frac{dT}{dt} = - k\,(T - T_1)$$

där $k > 0$ är proportionalitetsfaktorn. Minustecknet beror på att T är avtagande d.v.s

$$\frac{dT}{dt} < 0.$$

D.E kan skrivas $T' + kT = kT_1$ som löses med integrerande faktor e^{kt}.
(Beskrivning av temperaturens förändring)

$$(Te^{kt})' = kT_1e^{kt}$$

$Te^{kt} = T_1e^{kt} + C$. Om $T(0) = T_0$ fås för $t = 0$

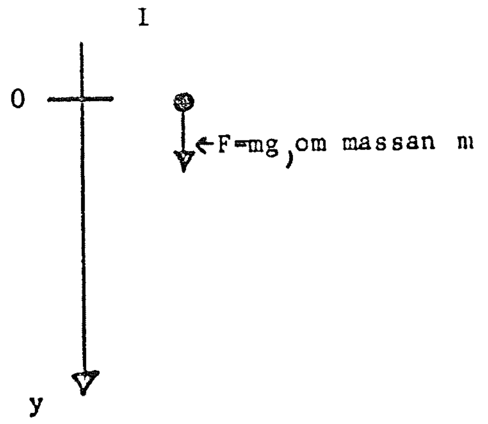
$$T_0 = T_1 + C \quad \text{d.v.s} \quad C = T_0 - T_1$$

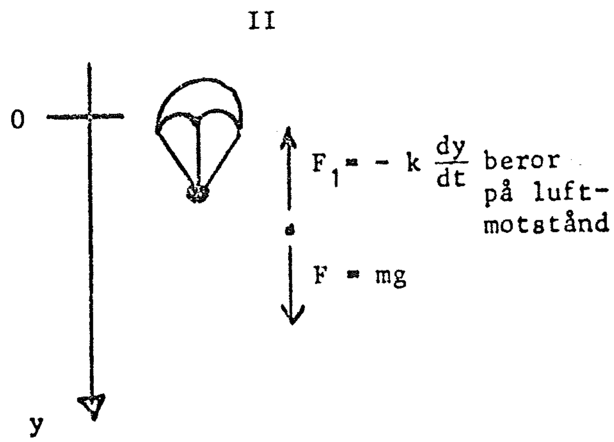
$$\because \quad T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt} \rightarrow T_1 \quad \text{då} \quad t\to\infty.$$

(Beskrivning av temperaturens tillstånd (= värde) vid olika tidpunkter.)

Ex. 2 Fallrörelse och fallskärmsrörelse.

Newtons rörelselag: massa · acceleration = kraften





$$\text{Newton: } m\,\underbrace{y''}_{\text{acceleration}} = \overbrace{mg}^{\text{kraften på kroppen}}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = gt + y'(0)$$

$$\Downarrow$$

$$y = g\frac{t^2}{2} + \underbrace{y'(0)}_{\text{begynnelsehast.}}t + \underbrace{y(0)}_{\text{begynnelseläge}}$$

$$\text{Newton: } my'' = mg - k\frac{dy}{dt}$$

två krafter verkar

$$y'' + \frac{k}{m}y' = g$$

$$\text{I.F.} = e^{\frac{k}{m}t}$$

$$(y'e^{\frac{k}{m}t})' = g\,e^{\frac{k}{m}t}$$

$$y' = C\,e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Om $y'(0) = 0$ fås

$$y' = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

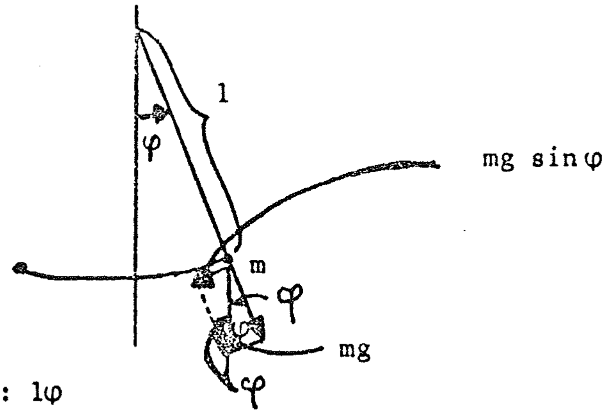
och

$$y = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + y(0)$$

Obs! $y'(t) \to \frac{mg}{k}$ då $t \to \infty$,

d.v.s fallskärmen faller med nästan konstant hastighet efter en stund.

Ex.3 Pendelrörelse.



Pendelkulans avvikelse: $l\varphi$

-"- hastighet: $l\varphi'$

-"- acceleration: $l\varphi''$

Newtons rörelselag, $F = ma$, ger
kraften riktad mot φ:s riktning

$$- mg \sin \varphi = m\, l\, \varphi''$$

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

$\sin \varphi \simeq \varphi$ ger

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad \text{med K.E} \quad r^2 + \frac{g}{l} = 0\ , \ r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\varphi(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

Tiden T för en hel svängning fås ur sambandet:

$$\varphi(t + T) - \varphi(T) = 0$$

som gäller om $\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = 2\pi$

$$T^2 = 4 \frac{\pi^2}{g} \cdot l = 4 \text{ om } l \approx 1$$

d.v.s en pendel pendel svänger från ena ytterläget till det andra (= halva svängningen) på 1 sek ($\Rightarrow T^2 = 4$) om $l \simeq 1$ meter (s.k sekundpendel).

OBS! Lösningskurvan: $\varphi(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\,\Big(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\sin \delta} \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\cos \delta} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\,t\Big) =$

$$= \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2}}_{\text{amplituden = maximala utslagsvinkeln}} \sin \Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \delta\Big) = \text{ren sinuskurva}$$

Ex. 4 Radioaktivt sönderfall

Ett radioaktivt ämne sönderfaller så att under en tidsperiod Δt sönderfaller en bestämd bråkdel av den radioaktiva massan $m(t)$:

$$\underbrace{m(t+\Delta t) - m(t)}_{<\,0,\ \text{därav minustecknet}} = -k\, m(t) \cdot \Delta t \quad . \text{ Division med } \Delta t \text{ ger}$$

$$m'(t) = -k\, m(t)$$

$m' + k m = 0$ som via integrerade faktor ger

$$m(t) = m(0)e^{-kt} \qquad (*)$$

Med ämnets halveringstid T menas den tid det tar innan

$$m(T) = m(0)e^{-kT} = \frac{1}{2}\, m(0)$$

som ger $e^{-kT} = \frac{1}{2}$

$$\underline{kT = \ln 2}$$

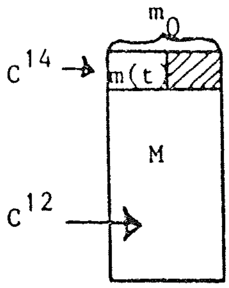
För den vanliga isotopen av uran är $T \simeq 4{,}5$ miljarder år. Genom att i olika klippblock som innehåller uran studera proportionerna mellan uran och sönderfallsprodukten bly kan man med hjälp av ekv (*) datera klippblocken. Sålunda har man på jorden hittat 3 miljarder gamla klippblock (jordens ålder beräknas till 4,5 miljarder år).

Omkring 1950 utvecklade Willard Libby en metod (Kol-14-metoden) att datera föremål som är 10.000 - 50.000 år. Genom kosmisk strålning bildas C^{14} som oxideras till CO_2. C^{14} har en halveringstid på 5.600 år. Vid jordytan är proportionen av C^{14} och C^{12} i koldioxid konstant, vilket även gäller kolinnehållet i levande materia. När materian dör sönderfaller C^{14} kolet enligt formeln

$$m(t) = m_0\, e^{-kt}.$$

Om ett gammalt föremål från början innehöll m_0 gram C^{14} och M gram C^{12}, och föremålet idag innehåller $m(t)$ gram C^{14} och fortfarande M gram C^{12} ger (*) med

$$k = \frac{\ln 2}{5\ 600}:$$



$$\underline{e^{-kt}} = \frac{m(t)}{m_0} = \frac{\frac{m(t)}{M}}{\frac{m_0}{M}} \approx \frac{\frac{m(t)}{M+m(t)}}{\frac{m_0}{M+m_0}} = \frac{c_1 \cdot (\text{radioaktiviteten i provbiten})}{c_1 \cdot (\text{radioaktiviteten i färskt kol})}$$

$m_0 < M$

radioaktiviteten direkt prop. mot andelen C^{14} i provet

$$\left(-\frac{m_0}{M+m_0} + \frac{m_0}{M} = \frac{m_0^2}{M(M+m_0)} = \frac{m_0}{M} \cdot \frac{m_0}{M+m_0}\right.$$

d.v.s den relativa skillnaden mellan $\frac{m_0}{M}$ och $\frac{m_0}{M+m_0}$ är ungefär $\frac{m_0}{M}$ som är ett mycket litet tal). Ur ovanstående ekv. fås provbitens ålder t.

∵ Om radioaktiviteten i provet är hälften ($\frac{1}{4}$) av radioaktiviteten i färskt kol är provet 5 600 år (11.200 år) o.s.v. Sålunda har C-14-metoden bl.a givit att Dödahavsrullarna är från 1917 ± 200 år f. Kr., grottmålningarna i Lascaux i södra Frankrike är 15.516 ± 900 år, Stonehenge i södra England 3798 ± 275 år. För denna tillämpning av ekvation (*) fick Libby 1960 års Nobelpris i kemi.

Ex. 5 (Smittospridning)

I ett land med 8 milj innevånare, som är likformigt fördelade utbryter en epedemi. Vid tiden t har $y(t)$ personer drabbats och alla drabbade har samma förmåga att i sin tur smitta andra osmittade personer. Antag att 8000 personer drabbats vid tiden $t = 0$ och 80000 vid tiden $t = 1$. Hur många har fått sjukdomen vid tiden $t = 3$? Antag att antalet människor som föds eller dör under denna tid är försumbart.

Lösning: Antag att $y(t)$ personer drabbats efter tiden t. Sätt
$B = 8.000.000$

$$\underbrace{y(t+\Delta t) - y(t)}_{\text{antalet som smittas under tiden } \Delta t} = k\, y(t) \underbrace{(B - y(t)}_{\text{mot antalet friska}} \Delta t$$

och mot tiden

mot antalet smittade

är direkt prop ~~mot~~

Division med Δt ger: $y' = k y (B - y)$

$$\frac{y'}{y(B-y)} = k \quad \text{(separerade variabler!)}$$

$$\frac{1}{B} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{B-y} \right) dy = \int k\, dt$$

$$\frac{1}{B} \ln \frac{y}{B-y} = kt + C$$

$$t = 0 \Rightarrow \frac{y}{B-y} = \frac{8\,000}{8.000.000 - 8\,000} = \frac{1}{999} \Rightarrow \frac{1}{B} \ln \frac{1}{999} = C$$

$$t = 1 \Rightarrow \frac{y}{B-y} = \frac{80\,000}{8.000.000 - 80.000} = \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{1}{B} \ln \frac{1}{99} = k + C$$

$$t = 3 \text{ ger } \frac{1}{B} \ln \frac{y}{B-y} = 3k + C = 3k + 3C - 2C =$$

$$= \frac{3}{B} \ln \frac{1}{99} - \frac{2}{B} \ln \frac{1}{999} \Rightarrow \ln \frac{y}{B-y} = 2 \ln 999 - 3 \ln 99 =$$

$$= \ln \frac{999 \cdot 999}{99 \cdot 99 \cdot 99} = \ln \frac{111 \cdot 111}{11 \cdot 11 \cdot 11} = \ln \frac{37 \cdot 37}{11 \cdot 11 \cdot 11}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{B-y} = \frac{37 \cdot 37}{11 \cdot 11 \cdot 11} = u \Rightarrow y = B \frac{u}{u+1}$$

$$u = \frac{1369}{1331} \approx 1 \Rightarrow \frac{u}{u+1} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow y(3) \approx \frac{1}{2} B = 4 \text{ milj.}$$

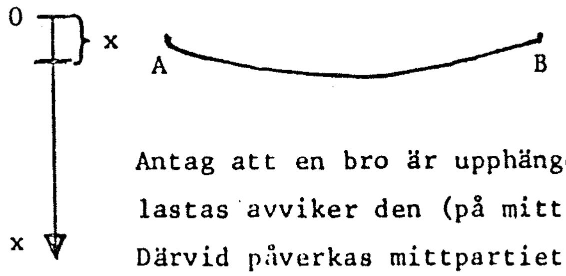
Kort repetition av proportionalitet:

y är direkt prop. mot x om det finns en konstant k sådan att $y = k \cdot x$. Ex. k = kilopris, x = antal kilo, y = pris.

y är direkt prop. mot x och u och omvänt prop. mot t om det finns en konstant k sådan att

$$y = k\,\frac{x \cdot u}{t} \quad .$$

Ex. 7 Om svängande broar.



Antag att en bro är upphängd i två punkter A och B. Då bron belastas avviker den (på mitten) från viloläget med x längdenheter. Därvid påverkas mittpartiet av en kraft, riktad mot viloläget, proportionell mot x. Om belastningen upphör kommer bron i svängning. Enligt Newton är då accelerationen x'' direkt prop. mot kraften som i sin tur är prop. mot x:

$$x'' = -kx$$

Om vi dessutom har en dämpande kraft prop. mot hastigheten x' fås ekv.

$$x'' = -kx - k_1x' \qquad \text{eller}$$

$$x'' + k_1x' + kx = 0.$$

K.E. $r^2 + k_1r + k = 0$

$$r_{1,2} = -\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k}$$

Om $\frac{k_1^2}{4} - k > 0$ blir r_1 och $r_2 < 0$ och $x = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t} \to 0$ snabbt då $t \to \infty$ d.v.s bron går utan svängningar tillbaka till viloläget.

Om $\frac{k_1}{4} - k = 0$ blir $r_1 = r_2$ och

$$x = (At + B)e^{-\frac{k_1}{2}t} \to 0 \text{ fortfarande då } t \to 0.$$

Om däremot $\frac{k_1^2}{4} - k = -\omega^2 < 0$ fås lösningen $x = e^{-\frac{k_1}{2}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

d.v.s bron beskriver en dämpad ($e^{-\frac{k_1}{2}t} \to 0$) svängningsrörelse då $t \to \infty$.

Om bron dessutom påverkas av en yttre kraft $Q(t)$ blir D.E för brons rörelse

$$x'' = -kx - k_1x' + Q(t) \quad \text{d.v.s}$$

$$x'' + k_1x' + kx = Q(t)$$

Vi antar att vi har det periodiska fallet med $\frac{k_1^2}{4} - k = -\omega^2 < 0$.
Vi räknar vidare med begynnelsevillkoren $x(0) = x'(0) = 0$.

I. $Q(t) = a \Rightarrow x = x_p + x_h = \frac{a}{k} + e^{-\frac{k_1t}{2}}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

som ger

$$x(t) = \frac{a}{k} + e^{-\frac{k_1t}{2}}\left(-\frac{a}{k}\cos\omega t - \frac{ak_1}{2k\omega}\sin\omega t\right)$$

om hänsyn tas till begynnelsevillkoren.

Anm. Bron kommer i svängning även om belastningen är kvar!

II. $Q(t) = \sin at$, $a > 0$, $a \neq \omega$, $k_1 = 0$

(d.v.s $\omega = \sqrt{k}$) ger lösningen (kontrollera!)

$$x(t) = \frac{1}{k - a^2}\left(\sin at - \frac{a}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}\,t\right)$$

som är en periodisk svängning, där amplituden blir farligt stor när a^2 ligger nära k. Vad händer när $a = \sqrt{k}$?

III. $Q(t) = \sin\sqrt{k}\,t$, $k_1 = 0$ ger lösningen

$$x(t) = \overbrace{-\frac{1}{2\sqrt{k}}\,t\cos\sqrt{k}\,t}^{x_p} + \overbrace{\frac{1}{2k}\sin\sqrt{k}\,t}^{\text{från } x_h}$$

om hänsyn tas till begynnelsevillkoren (kontrollera!). Faktorn t i 1:a termen i lösningen svarar mot att svängningens amplitud ökar hela tiden så att bron till sist brister. Det som kan förhindra detta (och oftast i praktiken gör det) är den dämpande faktorn k_1, som vi för enkelhetens skull satt till 0 här. Dock lär det ha hänt under 1:a världskriget att en marscherande trupp vid ett tillfälle, genom att de gick i den takt som svarade mot brons egensvängning, fick en bro de skulle passera att brista, varvid truppen störtade ner i djupet. Detta lär ha lett till att trupper fick order att marschera i otakt över broar.

Ett liknande fenomen med resonans gör att sopraner med sina röster kan spränga sönder kristallglas genom att hålla ut en lämpligt hög ton (= glasets egensvängning d.v.s den svängning som svarar mot den ton som erhålles då man knackar på glaset med t.ex en sked) tillräckligt länge.

Med mycket nöje

Lycka till

__Exempel__ (Populationsmodeller). Låt $x(t)$ vara antalet individer vid tiden t i en population. (Populationen kan vara t ex bakterierna i en kultur, hararna i ett skogsområde eller jordens befolkning.) Det är klart att $x(t)$ är ett heltal, och alltså varierar språngvis med t. Speciellt är $x(t)$ ingen deriverbar funktion. Om emellertid $x(t)$ är ett stort tal kommer förändringar i antalet med en eller ett par individer relativt sett att vara försumbara. Vi ska i vår modell av populationen göra approximationen att $x(t)$ är en deriverbar funktion.

Låt $r(x,t)$ vara skillnaden mellan födelse- och dödsintensitet hos populationen, så att tillväxten är

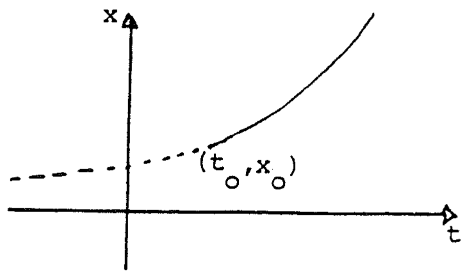
$$\frac{dx}{dt} = r(x,t)x.$$

Den enklaste situationen är att $r(x,t)$ är konstant, $r(x,t) \equiv a$. Även om detta inte är helt sant bör det kunna vara en rimlig approximation under ett kort tidsintervall. Vi får då differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{1}$$

som i dessa sammanhang går under namnet *Malthus lag*. Antag att vi har ett begynnelsevärde $x(t_0) = x_0$. Lösningen till (9) blir då

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)},$$



en om $a > 0$ växande, om $a < 0$ avtagande exponentialfunktion.

Ekvationen (1) kan tänkas vara en realistisk modell om populationen inte blir alltför stor. (Dess resultat överensstämmer väl med vad man vet om jordens befolkningsutveckling under de senaste trehundra åren.) För stora värden på t ger (1) emellertid uppenbart orimliga resultat.

Om populationen blir för stor måste vi ta hänsyn till att individerna konkurrerar om utrymme, födoresurser m m, något som inte beaktas i (1). Vi gör detta genom en tilläggsterm i högra ledet i (1),

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = ax - bx^2.$$

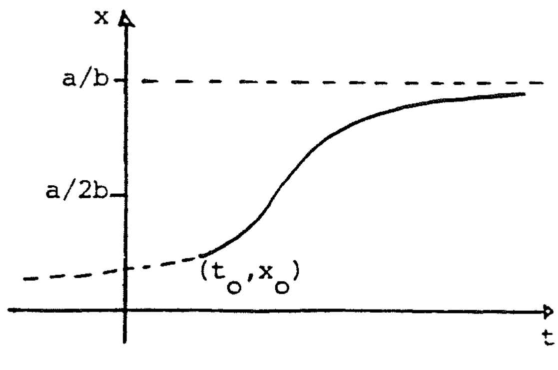
Här är a och b positiva konstanter med b mycket mindre än a, så att effekten av tilläggstermen märks bara då $x(t)$ är stort. Tilläggstermens utseende kan motiveras med att det statistiska medelvärdet av antalet möten per tidsenhet mellan två individer är proportionellt mot $x(t)^2$. Differentialekvationen (2) går under namnet den *logistiska lagen*. (Den infördes av en holländsk matematisk biolog, Verhulst, 1837.)

I (2) kan variablerna separeras. Efter litet räkningar, som överlämnas åt läsaren, får man

$$\frac{1}{a}\ln\frac{x(t)}{x_0}\left|\frac{a-bx_0}{a-bx(t)}\right| = t - t_0 \Longleftrightarrow \frac{x(t)}{x_0}\left|\frac{a-bx_0}{a-bx(t)}\right| = e^{a(t-t_0)}.$$

Man kan se att uttrycket inom beloppstecknen är positivt. (Av (2) följer nämligen att en lösning som skär linjen $x = a/b$ har derivatan lika med noll i skärningspunkten. Av entydighetssatsen i kapitel 3 följer att denna lösning måste vara $x(t) \equiv a/b$. Ingen annan lösning kan alltså skära linjen $x = a/b$.) Vi kan därför ta bort absolutteckenen och lösa ut $x(t)$:

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a-bx_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$



Vi ser att $x(t) \to a/b$ då $t \to \infty$ oberoende av begynnelsevärdet. Om $0 < x_0 < a/b$ är $x(t)$ växande. Funktionskurvan, den s k *logistikkurvan*, har ett S-format utseende. Visa som övning att $x(t) = a/2b$ i inflexionspunkten.

Lösningen till (2) visar i många fall god överensstämmelse med gjorda observationer.

Anm. Differentialekvationen (1) har använts som modell i många andra sammanhang, exempelvis radioaktivt sönderfall. I själva verket dyker den upp varje gång vi har att göra med en exponentiellt varierande funktion, eftersom den satisfieras av x_0e^{at}.

Ekvationen (2) förekommer bl a i samband med kemiska jämviktsreaktioner.

Tumörtillväxt

"Fritt levande" celler i måttlig mängd tillväxer med en hastighet som är proportionell mot cellkolonins storlek. Om V(t) betecknar volymen av cellerna vid tiden t, gäller alltså

$$\frac{dV}{dt} = k \cdot V(t) \qquad (1)$$

Solida tumörer däremot tillväxer inte på samma sätt. Den tid det tar för tumören att fördubbla sin volym blir allt längre. Olika försök har visat att många solida tumörers tillväxt kan beskrivas med ekvationen

$$\frac{dV}{dt} = \lambda \cdot e^{-\alpha t}\, V(t) \qquad (2)$$
$$\alpha > 0$$

Om vi dessutom vet att volymen vid tiden t=0 är V_0 och sedan löser vårt IVP, får vi den sk. Gompertz' relation:

$$V(t) = V_0 \, e^{\frac{\lambda}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})} \qquad (3)$$

Medicinska forskare har lagt fram två olika teorier om varför tumörtillväxten avtar. De två teorierna kan åskådliggöras genom att man antingen hänför $e^{-\alpha t}$ till V(t) eller till konstanten λ, i (2):

$$\text{i)} \quad \frac{dV}{dt} = \left(\lambda \cdot e^{-\alpha t}\right) V(t) \qquad \text{ii)} \quad \frac{dV}{dt} = \lambda \left(e^{-\alpha t} \cdot V(t)\right)$$

i) Enligt den första teorin beror den minskande tillväxten på att cellerna blir äldre. Celldelningen sker mindre ofta och delningen tar längre tid.

ii) Enligt denna teori sker celldelningen lika snabbt hela tiden, men bråkdelen celler, som fortsätter att dela sej när tumören blir äldre, blir allt mindre. Detta beror på att blodtillförseln till cellerna mitt inne i tumören så småningom upphör. Cellerna dör, och till slut finns det bara ett yttre skal som lever och fortsätter att dela sej.

Kuu