Viktiga begrepp och resultat - Gränsvärden, kontinuitet

- Gränsvärdesdefinitionerna. Dessa är väsentligen av två typer:
  - Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet G då x går mot oändligheten om vi kan få funktionsvärdena $f(x)$ *godtyckligt nära* G för alla *tillräckligt stora* x. Vi skriver då

    $$\lim_{x\to\infty} f(x) = G,$$

    eller

    $$f(x) \to G \text{ då } x \to \infty$$
  - Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet G då x går mot talet a om vi kan få funktionsvärdena $f(x)$ *godtyckligt nära* G för alla x som ligger *tillräckligt nära* a. Vi skriver då

    $$\lim_{x\to a} f(x) = G,$$

    eller

    $$f(x) \to G \text{ då } x \to a$$
- Gränsvärdesdefinitionerna - de formella versionerna.
  - *Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet G då x går mot oändligheten om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega = \omega_\varepsilon$ sådant att*

    $$\left.\begin{array}{l} x > \omega \\ x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - G| < \varepsilon.$$

    Vi skriver i så fall $f(x) \to G$ då $x \to \infty$ eller $\lim_{x\to\infty} f(x) = G$.
  - *Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet G då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ sådant att*

    $$\left.\begin{array}{l} |x - a| < \delta \\ x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - G| < \varepsilon.$$

    Vi skriver i så fall $f(x) \to G$ då $x \to a$ eller $\lim_{x\to a} f(x) = G$.
- Vi inför beteckningarna

  $$\begin{array}{rcll} \displaystyle\lim_{x\to a_+} f(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to a, x\geq a} f(x) & x \text{ går mot } a \text{ från höger} \\ \displaystyle\lim_{x\to a_-} f(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to a, x\leq a} f(x) & x \text{ går mot } a \text{ från vänster} \end{array}$$
- Regler för gränsvärdesberäkningar: *Låt a vara ett reellt tal eller $\pm\infty$.*
  1. *Om $f(x) \to 0$ då $x \to a$ och om $g(x)$ är begränsad för x nära a så följer att*

     $$f(x)g(x) \to 0 \text{ då } x \to a.$$
  2. *Om*

     $$\lim_{x\to a} f(x) = A, \text{ och } \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

     så följer att

(a)
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$$
(b)
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$$
(c)
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \qquad \text{om } B\neq 0.$$

3. (Sammansättningsregeln) *Om*
$$f(x)\to A \text{ då } x\to a \text{ och } g(t)\to a \text{ då } t\to p$$
så följer att
$$f(g(t))\to A \text{ då } t\to p.$$

4. (Instängningsregeln) *Antag att*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A,$$
och att
$$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$$
för x nära a. Då följer att
$$\lim_{x\to a} h(x) = A.$$

5. *Om $f(x)\leq g(x)$ för x nära a och*
$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \text{ och } \lim_{x\to a} g(x) = B,$$
så följer att
$$A\leq B.$$

- Definition av kontinuitet:
  - *En funktion f är kontinuerlig i punkten $x_0\in D_f$ om det gäller att*
  $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
  Vi säger att en funktion f är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd
- **Sats:** *De elementära funktionerna är kontinuerliga.*
- **Sats:** *Om f och g är kontinuerliga så är också funktionerna $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ och $f\circ g$ kontinuerliga på sina resp. definitionsmängder.*
- **Satsen om mellanliggande värden:** *Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ så antar f varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$.*
- **Följdsats:** *Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och om $f(a)f(b)<0$ (dvs. funktionsvärdena $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken) så har f minst ett nollställe på intervallet $]a,b[$.*
- **Sats:** *Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ så antar f ett största och ett minsta värde där. (Speciellt så blir då f begränsad).*

- Talet e - den naturliga logaritmens bas - definieras som
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
Det visar sig att e är irrationellt, $e = 2.7182\ldots$

- Standardgränsvärden: De mest väsentliga är

  1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{{}^a\log x}{x^\alpha} = 0, \qquad \text{om } \alpha > 0$$
  2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \text{om } a > 1$$
  3. $$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \qquad \text{om } \alpha > 0$$
  4. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t,$$
  5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$
  6. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$
  7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

- En *asymptot* till en funktion $f(x)$ är en rät linje som har den egenskapen att grafen $y = f(x)$ kommer godtyckligt nära denna räta linje bara vi befinner oss tillräckligt långt ifrån origo. Asymptoter kan vara av två slag - dels lodräta linjer av formen $x = a$ och dels "sneda" linjer av formen $y = kx + m$.

  Tillvägagångssätt för att finna asymptoter till rationella funktioner $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, (dvs. $p(x)$ och $q(x)$ är polynom).

  1. Lodräta asymptoter. Finn samtliga nollställen till nämnaren, dvs. lös ekvationen $q(x) = 0$. Om rella sådana ej finnes så saknas lodräta asymptoter. I andra fallet, om a skulle vara ett nollställe till $q(x)$ så krävs en undersökning av funktionen f i närheten av a. Om det visar sig att
  $$\lim_{x\to a_+} f(x) = \pm\infty \text{ och/eller } \lim_{x\to a_-} f(x) = \pm\infty,$$
  då är $x = a$ en lodrät asymptot.
  2. Sneda asymptoter. Om grad(p) >grad$(q) + 1$ så finns inga sneda asymptoter. Om grad(p) $\leq$grad$(q)+1$ så finns en sned asymptot $y = kx+m$, som man finner enklast genom polynomdivision; man kan då skriva
  $$f(x) = kx + m + \frac{r(x)}{q(x)},$$
  där $kx + m$ är kvoten och $r(x)$ resten vid en sådan division.
  Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{r(x)}{q(x)} = 0$, så följer med en gång att då är $y = kx + m$ en sned asymptot till $f(x)$.