Kedjeregeln med bevis.

Först en alternativ formulering av deriverbarhet.

Den tidigare givna definitionen av deriverbarhet innebär:
Funktionen f är *deriverbar* i x, om f är definierad i en omgivning av x och gränsvärdet

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

existerar. Om vi kallar differensen mellan differenskvoten och dess gränsvärde A för $\rho(x, h)$ (vi kan definiera $\rho(x, 0) = 0$, så blir funktionen $h \mapsto \rho(x, h)$ kontinuerlig i $h = 0$), så har vi

$$f(x+h) - f(x) = (A + \rho(x, h))h \quad \text{där} \quad \lim_{h \to 0} \rho(x, h) = 0, \tag{2}$$

vilket utgör en ekvivalent formulering av (1). *Derivatan* A skriver vi vanligen $f'(x)$.

Kedjeregeln:

Om g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$, så är $f \circ g$ deriverbar i x, och $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Bevis:

Att g och f är deriverbara i x respektive $g(x)$ innebär alltså enligt (2) att det finns tal $g'(x)$ och $f'(g(x))$, så att

- $g(x+h) - g(x) = (g'(x) + \rho_1(x, h))h \quad$ där $\quad \lim_{h \to 0} \rho_1(x, h) = 0$,
- $f(g(x) + k) - f(g(x)) = [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)]k \quad$ där $\quad \lim_{k \to 0} \rho_2(g(x), k) = 0$.

Med $k = g(x+h) - g(x)$, och alltså $g(x) + k = g(x+h)$, får vi nu:

$$f \circ g(x+h) - f \circ g(x) = f(g(x+h)) - f(g(x)) = \tag{3}$$

$$= [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g(x+h) - g(x)) = \tag{4}$$

$$= ([f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g'(x) + \rho_1(x, h))h. \tag{5}$$

Därmed är differenskvoten för $f \circ g$

$$\frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{h} = [f'(g(x)) + \rho_2(g(x), k)](g'(x) + \rho_1(x, h)). \tag{6}$$

Låt $h \to 0$. Eftersom g är deriverbar, därmed kontinuerlig, så gäller att $k = g(x+h) - g(x) \to 0$, varmed både $\rho_1(x, h)$ och $\rho_2(g(x), k)$ går mot noll. Vi får $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$. VSB