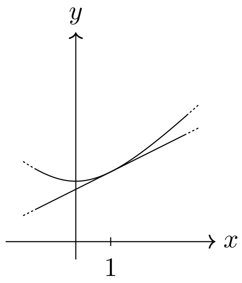
4.7.4 Finn linjariseringen av $y = \sqrt{3+x^2}$ i punkten $x = 1$.

Linjariseringen har ekvationen

$$L(x) = y(1) + y'(1)(x-1).$$

Eftersom

$$y(1) = \sqrt{4} = 2,$$
$$y'(1) = \frac{d}{dx}\sqrt{3+x^2}\bigg|_{x=1} = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2},$$



blir ekvationen

$$L(x) = \tfrac{1}{2}(x-1) + 2.$$

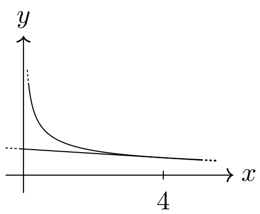
4.7.6 Finn linjariseringen av $y = 1/\sqrt{x}$ i punkten $x = 4$.

Linjariseringen har ekvationen

$$L(x) = y(4) + y'(4)(x-4).$$

Eftersom

$$y(4) = 1/\sqrt{4} = 1/2,$$
$$y'(4) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}\bigg|_{x=4} = \frac{-\frac{1}{2}}{x^{3/2}}\bigg|_{x=4} = -\frac{1}{16},$$



blir ekvationen

$$L(x) = -\tfrac{1}{16}(x-4) + \tfrac{1}{2}.$$

4.7.16 Använd en lämplig linjarisering för att bestämma en approximation av värdet $\sqrt{47}$.
Bestäm felets tecken och skatta dess storlek. Använd denna information för att bestämma ett intervall som helt säkert innehåller värdet $\sqrt{47}$.

Det verkar naturligt att använda funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Vi ska alltså bestämma $f(47)$. I den närbelägna punkten $x = 49$ vet vi f:s exakta värde, $f(49) = 7$. Vi väljer därför att linjarisera f kring punkten $x = 49$.

Linjariseringen blir

$$L(x) = f(49) + f'(49)(x-49) = 7 + \tfrac{1}{14}(x-49).$$

Ett approximativt värde på $\sqrt{47}$ är alltså

$$L(47) = 7 + \tfrac{1}{14}\cdot(-2) = \tfrac{48}{7} \approx 6{,}85714.$$

Felet i approximationen ges av uttrycket

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x-49)^2,$$

där $x < \xi < 49$. För $x = 47$ har vi alltså att felet är

$$2f''(\xi) = \frac{-2}{4\xi\sqrt{\xi}}.$$

Vi ser att $f'' < 0$ i intervallet $(47, 49)$ så feltermen är alltså negativt.

Vidare ser vi också att f'' är en växande funktion varför vi har att

$$f''(\xi) < f''(49) = \frac{-1}{4\cdot 49\cdot\sqrt{49}} = \frac{-1}{1372},$$
$$f''(\xi) > f''(47) = \frac{-1}{4\cdot 47\cdot\sqrt{47}} > \frac{-1}{4\cdot 47\cdot\sqrt{36}} = \frac{-1}{1176}.$$

Alltså är

$$-\frac{1}{588} < 2f''(\xi) < -\frac{1}{686}.$$

Felet ligger alltså inom intervallet $(\frac{-1}{588}, \frac{-1}{686})$ och därmed ligger det sanna värdet av $\sqrt{47}$ inom intervallet

$$\sqrt{47} \in \big(L(74) + \tfrac{-1}{588}, L(47) + \tfrac{-1}{686}\big) = (\tfrac{48}{7} - \tfrac{1}{588}, \tfrac{48}{7} - \tfrac{1}{686}) \approx (6{,}85544;\ 6{,}85568).$$

Jämför detta med det sanna värdet

$$\sqrt{47} = 6{,}85565\cdots$$

4.7.22 Använd en lämplig linjarisering för att bestämma ett approximativt värde av $\sin 33°$.

Bestäm felets tecken och skatta dess storlek. Använd denna information för att bestämma ett intervall som helt säkert innehåller värdet $\sin 33°$.

Sätt

$$f(x) = \sin x.$$

Vi ska bestämma $f(33°)$. Den närmsta punkt vi vet det exakta värdet på f är $x = 30°$. Vi linjariserar kring denna punkt

$$L(x) = f(\tfrac{\pi}{6}) + f'(\tfrac{\pi}{6})(x - \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \tfrac{\pi}{6}) + \tfrac{1}{2}.$$

Ett approximativt värde på $\sin 33° = \sin(\frac{33}{170}\pi)$ är alltså

$$L(\tfrac{33}{180}\pi) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big) + \tfrac{1}{2} \approx 0{,}54534.$$

Den linjära approximationen uppfyller sambandet

$$f\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) = L\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) + \tfrac{1}{2}f''(\xi)\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2$$

där $\frac{1}{6}\pi < \xi < \frac{33}{180}\pi$. För att skatta feltermen behöver vi alltså bestämma

$$f''(x) = -\sin x.$$

Vi ser att $f'' < 0$ i intervallet $\big(\frac{1}{6}\pi, \frac{33}{180}\pi\big)$ varför felet är negativt.

Eftersom sinusfunktionen är växande i intervallet $\big(\frac{1}{6}\pi, \frac{33}{180}\pi\big)$ är f'' avtagande i samma intervall och vi har att

$$f''(\xi) > f''\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) = -\sin\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) > -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f''(\xi) < f''\big(\tfrac{1}{6}\pi\big) = -\sin\tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{1}{2}.$$

Alltså är

$$-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2 < \tfrac{1}{2}f''(\xi)\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2 < -\tfrac{1}{4}\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2,$$

eller med siffror och avrundat

$$-9{,}6929\cdot 10^{-4} < \tfrac{1}{2}f''(\xi)\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2 < -6{,}8539\cdot 10^{-4}.$$

Därmed ligger det sanna värdet av $\sin 33°$ inom intervallet

$$\begin{aligned}\sin 33° &\in \big(L(\tfrac{33}{180}\pi) - 9{,}6929\cdot 10^{-4};\ L(\tfrac{33}{180}\pi) - 6{,}8539\cdot 10^{-4}\big)\\ &\approx (0{,}5443757;\ 0{,}5446596).\end{aligned}$$

Jämför detta med det sanna värdet $\sin 33° = 0{,}5446390\cdots$