Viktiga begrepp och resultat - Primitiva funktioner

- Definitionen av primitiv funktion: *Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. Vi säger att en deriverbar funktion F är en primitiv funktion till f om det gäller att*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

  Vi skriver $F(x) = \int f(x)dx$.

- **Sats:** *Om F_0 är en primitiv funktion till f så har alla andra primitiva funktioner till f formen*

$$F(x) = F_0(x) + C$$

  för någon konstant C.

- **Sats:** *Om f är kontinuerlig på ett intervall I så finns en primitiv funktion till f på I.*

- Elementära primitiva funktioner:

1. $\int \alpha dx = \alpha x + C$	2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\quad \alpha \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

- Räkneregler: Låt f, g vara givna funktioner, F en primitiv funktion till f och låt α, β vara konstanter. Då gäller

  1. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ *Linjaritet*
  2. $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$ *Partiell integration*
  3. $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$ *Variabelsubstitution*

- Variabelsubstitution används mycket ofta, och kalkylerna brukar formaliseras på följande sätt:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left[\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{array} \right] = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

- Följande formler underlättar kalkylerna ibland:

  1. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$
  2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

Standardsubstitutioner

1.
$$\int f(ax+b)dx = \left[\begin{array}{l} u = ax+b \\ du = adx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{a}du \end{array}\right] = \frac{1}{a}\int f(u)du$$

Exempel:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x+3 \\ du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u}+C = \sqrt{2x+3}+C$$

Exempel:

$$\int e^{7x-2}dx = \left[\begin{array}{l} u = 7x-2 \\ du = 7dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{7}du \end{array}\right] = \frac{1}{7}\int e^u du = \frac{1}{7}e^u + C = \frac{1}{7}e^{7x-2} + C$$

2.
$$\int f(ax^2+b)xdx = \left[\begin{array}{l} u = ax^2+b \\ du = 2axdx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2ax}du \end{array}\right] = \frac{1}{2a}\int f(u)du$$

Exempel:

$$\begin{aligned}\int (3x^2+1)^{5/2}xdx &= \left[\begin{array}{l} u = 3x^2+1 \\ du = 6xdx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{6x}du \end{array}\right] = \frac{1}{6}\int u^{5/2}du \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{u^{7/2}}{7/2} + C = \frac{1}{21}(3x^2+1)^{7/2}\end{aligned}$$

Exempel:

$$\begin{aligned}\int \sin(x^2+1)xdx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x}du \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \sin(u)du \\ &= -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + C\end{aligned}$$

3. Mer allmänt: om $n \neq 0$ så får vi

$$\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \left[\begin{array}{l} u = ax^n+b \\ du = nax^{n-1}dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{nax^{n-1}}du \end{array}\right] = \frac{1}{na}\int f(u)du$$

4.
$$\int f(\sin x)\cos xdx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos xdx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos x}du \end{array}\right] = \int f(u)du$$

$$\int f(\cos x)\sin xdx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin xdx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{\sin x}du \end{array}\right] = -\int f(u)du$$

Exempel:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sin x}\cos xdx &= \left[\begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos xdx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos x}du \end{array}\right] = \int \frac{1}{2+u}du \\ &= \ln|2+u| + C = \ln|2+\sin x| + C\end{aligned}$$

Exempel:

$$\begin{aligned}\int e^{\cos x}\sin xdx &= \left[\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin xdx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{\sin x}du \end{array}\right] = -\int e^u du \\ &= -e^u + C = -e^{\cos x} + C\end{aligned}$$

5. Ibland fungerar detta:

$$\int f(\sqrt{x})dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \Leftrightarrow u^2 = x, \quad (u \geq 0) \\ 2udu = dx \end{array} \right] = 2\int f(u)udu$$

Exempel:

$$\begin{aligned} \int \cos(\sqrt{x})dx &= \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \Leftrightarrow u^2 = x \\ 2udu = dx \end{array} \right] = 2\int \cos(u)\cdot udu \\ &= \Big[\text{Partiell integration}\Big] = 2u\sin(u) - 2\int \sin(u)du \\ &= 2u\sin(u) + 2\cos(u) + C = 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

- För att bestämma en primitiv funktion till ett rationellt uttryck $\frac{p(x)}{q(x)}$ går man tillväga på följande sätt:

1. Om grad$(p) \geq$grad(q) utför polynomdivision. Då kan vi skriva

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

där $k(x)$ och $r(x)$ är polynom sådana att grad$(r) <$grad(q). Eftersom $k(x)$ är enkel att finna en primitiv funktion till så är problemet nu reducerat till att bestämma $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$.

2. Faktorisera nämnaren $q(x)$ i irreducibla reella faktorer av grad högst 2.
3. Utför en s.k. *partialbråksuppdelning*, med följande ansatser:

Faktor i nämnaren	Ansats
$x - \alpha$	$\frac{A}{x-\alpha}$
$(x-\alpha)^2$	$\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$
$(x-\alpha)^n$	$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

Exempel: Om grad$(p) < 5$ så ansätter vi

$$\frac{p(x)}{(x-1)^2(x+2)(x^2+6x+13)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+6x+13}.$$

Exempel: Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{x^3+4x^2+x+8}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Eftersom nämnaren har grad 3 och täljaren grad 4 behöver vi ej utföra någon polynomdivision. Partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3+4x^2+x+8}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} = \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+2B+D}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B+D=4 \\ 2A+C=1 \\ 2B+D=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B+D=4 \\ A=0 \\ B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ D=0 \\ A=0 \\ B=4 \end{cases} \end{aligned}$$

Följaktligen;

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left(\frac{4}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+2}\right) dx = 4\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx \\ &= 4\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + K, \end{aligned}$$

där K är en godtycklig konstant.

- Hantering av partialbråken. De linjära faktorerna är enkla:

$$\int \frac{1}{x-\alpha}dx = \ln|x-\alpha|$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx = -1\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} \quad \text{om } n \geq 2$$

De irreducibla kvadratiska

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$$

vållar ofta lite mer huvudbry. En kvadratkomplettering av nämnaren $x^2+bx+c = (x+b/2)^2-(b/2)^2+c$ och substitutionen $u = x+b/2$ för över integralen till formen

$$\int \frac{Cu+D}{u^2+d^2}du$$

som går att beräkna;

$$\begin{aligned} \int \frac{Cu+D}{u^2+d^2}du &= \int \frac{Cu}{u^2+d^2}du + \int \frac{D}{u^2+d^2}du \\ &= \frac{C}{2}\int \frac{2u}{u^2+d^2}du + \frac{D}{d^2}\int \frac{1}{(\frac{u}{d})^2+1}du = \frac{C}{2}\ln(u^2+d^2) + \frac{D}{d}\arctan(\frac{u}{d}) \end{aligned}$$

Exempel:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{(x+1)^2+4} = \\ \begin{bmatrix} u = x+1 \\ x = u-1 \\ du = dx \end{bmatrix} &= \int \frac{\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}}{u^2+4}du = \int \frac{\frac{1}{2}u}{u^2+4}du + \int \frac{\frac{1}{2}}{u^2+4}du \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2u}{u^2+4}du + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(u/2)^2+1}du \\ &= \frac{1}{4}\ln(u^2+4) + \frac{1}{4}\arctan\frac{u}{2} + C \end{aligned}$$

$$= [\text{tillbaka till } x] = \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{4}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

Allmäna tips vid integration

- Förenkla uttrycken så långt som möjligt.
- Om integralen involverar ett kvadratiskt uttryck $ax^2 + bx + c$, $ab \neq 0$ så försök att kvadratkomplettera. En enkel substitution reducerar sedan det kvadratiska uttrycket till en summa av kvadrater.
- Integraler som involverar produkter av trigonometriska funktioner kan ibland bestämmas eller förenklas genom att använda lämplig trigonometrisk formel t.ex $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ och $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.
- Integraler som involverar uttrycket $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ kan bestämmas genom substitutionen $x = a\sin\theta$. Trigonometriska integraler $\int f(\sin\theta)d\theta$ kan ibland bestämmas genom substitutionen $t = \tan(\theta/2)$.
- Använd partiell integration för att lösa integraler som involverar sådana funktioner som t.ex produkter av polynom och exponentialfunktioner, logaritmer och trigonometriska funktioner. Var uppmärksam på olika sätt att använda partiell integration för att få formler som representerar komplicerade integraler i termer av enklare sådana.
- Använd partialbråksuppdelning för att integrera rationella funktioner vars nämnare kan faktoriseras till reella linjära och kvadratiska faktorer. Kom ihåg att om nödvändigt utföra polynomdivision för att få ett bråk där polynomet i täljaren har lägre gradtal än polynomet i nämnaren.