Gränsvärdesberäkningar i praktiken

- ett komplement till kapitel 2 i analysboken

Jonas Månsson

När man beräknar gränsvärden använder man sig av en rad olika strategier beroende på det givna problemet. Avsikten med dessa sidor är att ge exempel på de viktigaste av dessa strategier. Det vi kommer att titta närmare på är

I. Gränsvärden som vi kan bestämma direkt

II. Standardgränsvärden då $x \to \infty$

III. Standardgränsvärden då $x \to 0$

IV. Instängning av funktioner

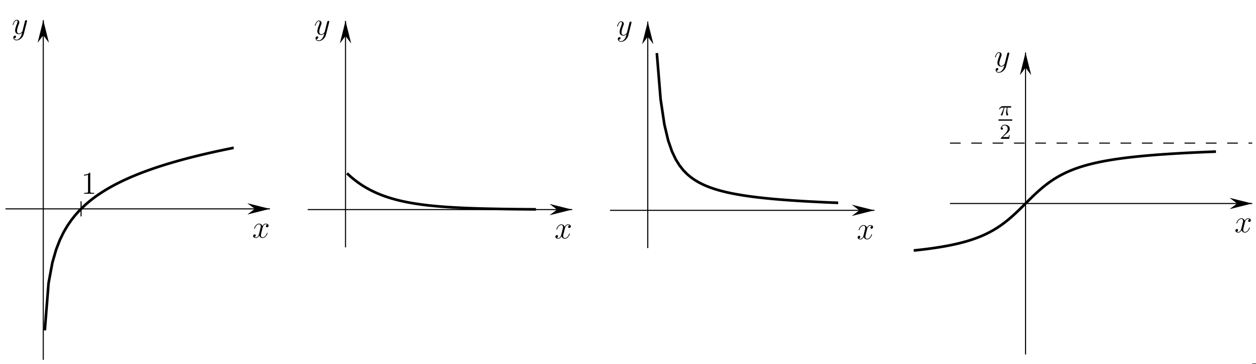
V. Gränsvärden av typen " $\dfrac{a}{0}$ "

I. Gränsvärden som vi kan bestämma direkt

När vi arbetar med gränsvärden kan vi förutsätta att vi känner till gränsvärdena för våra "vanliga" elementära funktioner, t.ex. $e^x, \ln x, x^3, \frac{1}{\sqrt{x}}, \ldots$. Vi behöver således inte "bevisa" dessa gränsvärden, utan kan ange dem direkt. Jag rekommenderar dock att man gör en snabb skiss av grafen till funktionen i fråga som stöd för sin slutsats. Låt oss titta på ett exempel:

Exempel 1: Genom att skissera graferna nedan ser vi att

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$



□

Vi kan också använda oss av olika *räkneregler* för gränsvärden (se sid.136 i boken). Dessa räkneregler säger väsentligen att vi naturligt kan kombinera gränsvärden av elementära funktioner med de fyra räknesätten och funktionssammansättning.

Exempel 2: Vi beräknar några gränsvärden:

$$\ln x + e^{-x} \to \text{“ } \infty + 0 \text{ “} = \infty \quad \text{då } x \to \infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - (\arctan x)^2 \to 0 - (\frac{\pi}{2})^2 = -\frac{\pi^2}{4} \quad \text{då } x \to \infty$$

$$\frac{3}{x^3 \cdot \arctan x + 5} \to \text{“ } \frac{3}{\infty \cdot \frac{\pi}{2} + 5} \text{ “} = \text{“ } \frac{3}{\infty} \text{ “} = 0 \quad \text{då } x \to \infty$$

Här stöter vi inte på några konstigheter, utan gränsvärdena blir precis vad vi “tror att de ska bli“. Observera att uttryck som är skrivna inom citationstecken inte är formellt korrekta, utan bara uttryck för hur man ska tänka vid gränsvärdesberäkningen. (Exempelvis finns ingenting i matematiken som skrivs $\infty \cdot \frac{\pi}{2} + 5$, men vi inser att detta uttryck totalt sett kommer att gå mot oändligheten.) □

Alla elementära funktioner som vi arbetar med är *kontinuerliga*, vilket betyder att om man vill beräkna gränsvärdet då x går mot ett tal, så sätter man helt enkelt in talet i funktionsuttrycket.

Exempel 3:

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \to \frac{\ln(2+1)}{2} = \frac{\ln 3}{2} \quad \text{då } x \to 2.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \arctan x \to \frac{1}{\sqrt{1}} + \arctan 1 = 1 + \frac{\pi}{4} \quad \text{då } x \to 1.$$

□

Hade det alltid varit så här lätt att beräkna gränsvärden hade allting varit frid och fröjd. Tyvärr uppstår det situationer där man inte kan resonera så enkelt som i exemplen ovan.

Exempel 4: Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + \ln x}{3e^x + x^2}$ och $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Vi börjar med det förstnämnda och provar att göra en direkt beräkning av gränsvärdet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + \ln x}{3e^x + x^2} = \text{“ } \frac{\infty + \infty}{\infty + \infty} \text{ “} = \text{“ } \frac{\infty}{\infty} \text{ “ } (?)$$

Här stöter vi på ett problem. Hur ska vi egentligen tolka “ $\frac{\infty}{\infty}$ “ ? Uttrycket indikerar att både täljare och nämnare går mot oändligheten, men vi har ingen aning hur “snabbt“ de går mot oändligheten jämfört med varandra. Här går det inte att komma längre med direkta metoder, utan vi måste använda oss av standardgränsvärden (se **II**).

Låt oss prova nästa gränsvärde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \text{“ } \frac{\ln 1}{0} \text{ “} = \text{“ } \frac{0}{0} \text{ “ } (?)$$

Även här stöter vi på problem då vi inte vet hur vi ska tolka " $\frac{0}{0}$ ". Vi måste använda oss av andra metoder (se **III**). $\square$

Anmärkning: Uttrycken " $\frac{\infty}{\infty}$ " och " $\frac{0}{0}$ " ovan är exempel på "farliga" uttryck där vi inte kan säga något direkt om gränsvärdet. Andra exempel på farliga uttryck är

$$\text{" } \infty - \infty \text{ ",} \quad \text{" } 0 \cdot \infty \text{ ",} \quad \text{" } 1^{\infty} \text{ ",} \quad \text{" } \infty^{0} \text{ ",} \quad \text{" } 0^{0} \text{ ".}$$

Får vi något av dessa uttryck kan vi inte beräkna gränsvärdet direkt, utan måste använda oss av någon annan metod. (Uttrycket " $\frac{a}{0}$ ", där a är en konstant, är lite speciellt och kommer särskilt behandlas i avsnitt **V**.)

II. Standardgränsvärden då $x \to \infty$

Om man försöker bestämma ett gränsvärde direkt och kommer fram till ett "farligt" uttryck, t.ex. " $\frac{\infty}{\infty}$ ", får man i stället lösa problemet genom att försöka hänvisa till redan bevisade gränsvärden, s.k. *standardgränsvärden*. De standardgränsvärden vi kan använda finns beskrivna på sid.155–156 i boken.

Vi ska nu försöka illustera principen för att använda standardgränsvärden då $x \to \infty$. De standardgränsvärden som används i exemplen nedan är

$$\frac{{}^{a}\log x}{x^{\alpha}} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty \tag{1}$$

$$\frac{x^{\alpha}}{a^{x}} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty \tag{2}$$

Dessa gränsvärden säger sammantaget att varje exponentialfunktion växer snabbare mot oändligheten än varje annan potensfunktion, som i sin tur växer snabbare mot oändligheten än varje annan logaritmfunktion.

Exempel 5: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} + \ln x}{3e^{x} + x^{2}}.$$

Vi såg i exempel 4 att detta gränsvärde inte kan beräknas direkt, då det är av typen " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Men nu vet vi att exponentialfunktioner växer snabbare mot oändligheten än både potensfunktioner och logaritmer, vilket innebär, för stora värden på x, att

$$\frac{e^{x} + \ln x}{3e^{x} + x^{2}} \approx \frac{e^{x}}{3e^{x}} = \frac{1}{3},$$

Gränsvärdet borde därför vara 1/3.

Detta fungerar dock inte som ett helt övertygande argument, då vi vet att man i matematiken måste hänvisa till bevisade satser. För att kunna använda standardgränsvärdena ovan måste uttrycket vara *exakt* på formen i (1) och (2). Vi använder därför följande allmänna princip för att skriva om funktionen:

Dividera både täljare och nämnare med nämnarens *dominerande term.*

Med *dominerande term* menas den term som växer snabbast mot oändligheten, och nämnarens dominerande term i vår funktion är e^x. Vi utför divisionen:

$$\frac{e^x + \ln x}{3e^x + x^2} = \frac{1 + \frac{\ln x}{e^x}}{3 + \frac{x^2}{e^x}}.$$

Nu kan vi använda standardgränsvärde (2) på uttrycket $\frac{x^2}{e^x}$, och det följer att $\frac{x^2}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$.

Visserligen så vet vi att logaritmfunktioner växer väldigt mycket långsammare än exponentialfunktioner, så det borde vara uppenbart att $\frac{\ln x}{e^x} \to 0$ då $x \to 0$. Ska man dock vara riktigt byråkratisk, så finns det faktiskt inget standardgränsvärde som säger det. Man kan dock skriva om uttrycket genom att "slänga in" en godtycklig potensfunktion (t.ex. x) och på så sätt kunna använda standardgränsvärde (1) och (2):

$$\frac{\ln x}{e^x} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x} \to 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{då } x \to \infty.$$

(Riktigt så byråkratiska behöver dock inte ni vara; det hade gått bra att säga $\frac{\ln x}{e^x} \to 0$ direkt.)

Nu återstår det bara att sammanfatta våra resultat:

$$\frac{e^x + \ln x}{3e^x + x^2} = \frac{1 + \frac{\ln x}{e^x}}{3 + \frac{x^2}{e^x}} \to \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} \quad \text{då } x \to \infty.$$

$\square$

Exempel 6: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + (\ln x)^5}{x^3 + 7x^2}.$$

Här är nämnarens dominerande term x^3, och vi dividerar täljare och nämnare med den:

$$\frac{x + (\ln x)^5}{x^3 + 7x^2} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{(\ln x)^5}{x^3}}{1 + \frac{7}{x}}.$$

Här skulle vi vilja tillämpa standardgränsvärde (1) på termen $\frac{(\ln x)^5}{x^3}$, men problemet är att logaritmen i täljaren är upphöjd med fem. För att få använda gränsvärdet skriver vi först om kvoten som en enda potens:

$$\frac{(\ln x)^5}{x^3} = \left(\frac{\ln x}{x^{3/5}}\right)^5 \to 0^5 = 0 \quad \text{då } x \to \infty.$$

Sammanfattningsvis får vi nu

$$\frac{x + (\ln x)^5}{x^3 + 7x^2} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{(\ln x)^5}{x^3}}{1 + \frac{7}{x}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0 \quad \text{då } x \to \infty.$$

$\square$

III. Standardgränsvärden då $x \to 0$

Hur arbetar man med standardgränsvärden då $x \to 0$? Nedan finns ett antal exempel för att illustrera principerna. De standardgränsvärden som används i exemplen är

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{då } x \to 0 \tag{3}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1 \quad \text{då } x \to 0 \tag{4}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \quad \text{då } x \to 0 \tag{5}$$

(Observera att alla gränsvärdena ovan är av typen “ $\frac{0}{0}$ “.)

Exempel 7: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

Här ser det ut som om vi skulle kunna använda standardgränsvärde (3) direkt. Men observera att detta inte går eftersom vi har $2x$ innanför sinusfunktionen i täljaren och bara x i nämnaren. Som påpekades ovan - för att få använda ett standardgränsvärde måste vår funktion överensstämma *exakt* med denna.

Däremot kan vi, genom att förlänga med 2, skriva om funktionen som

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}$$

vilket gör att vi nu har *samma* uttryck (d.v.s. $2x$) i både täljare och nämnare. Vi gör nu en s.k. *substitution* och kallar $2x$ för t.

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot \frac{\sin t}{t}$$

Observera att eftersom $t = 2x$ så kommer t att gå mot noll när x gör det, och *nu* kan vi använda standardgränsvärde (3). Skriver vi ut hela lösningen får vi

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = \begin{pmatrix} t = 2x \\ t \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{\sin t}{t} \to 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{då } x \to 0$$

$\square$

Exempel 8: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{3x} - 1}.$$

Här vill vi gärna använda standardgränsvärde (4), men ser att täljare och nämnare är omkastade. Detta kan vi dock lätt “fixa“ genom omskrivningen

$$\frac{x}{e^{3x} - 1} = \frac{1}{\frac{e^{3x}-1}{x}}.$$

Precis som i exempel 7, för att få $3x$ både i täljare och nämnare, förlänger vi med 3 och gör substitutionen $t = 3x$. Sen kan vi använda standardgränsvärde (4) utan problem:

$$\frac{x}{e^{3x}-1} = \frac{1}{\frac{e^{3x}-1}{x}} = \frac{1}{3\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}} = \left(\begin{array}{l} t = 3x \\ t \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{array}\right) = \frac{1}{3\cdot\frac{e^{t}-1}{t}} \to \frac{1}{3\cdot 1} = \frac{1}{3} \quad \text{då } x \to 0.$$

$\square$

Exempel 9: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}.$$

I detta exempel skulle vi vilja använda standardgränsvärde (5). Problemet är att vi nu inte har något x i nämnaren utan ett logaritmuttryck. Men ett sådant x kan vi, genom en finurlig omskrivning, “trolla fram“ på följande sätt:

$$\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)} = \frac{\ln(1+3x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+2x)}$$

Nu har vi två stycken kvoter som vi kan beräkna gränsvärdet av. Vi använder metoderna i exempel 7 och 8 ovan. Först den ena kvoten:

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3\cdot\frac{\ln(1+3x)}{3x} = \left(\begin{array}{l} t = 3x \\ t \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{array}\right) = 3\cdot\frac{\ln(1+t)}{t} \to 3\cdot 1 = 3 \quad \text{då } x \to 0.$$

Sen tar vi den andra:

$$\frac{x}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{x}} = \frac{1}{2\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}} = \left(\begin{array}{l} t = 2x \\ t \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{array}\right) = \frac{1}{2\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}} \to \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \to 0.$$

Allra sist kombinerar vi våra uträkningar:

$$\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)} = \frac{\ln(1+3x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+2x)} \to 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{då } x \to 0.$$

$\square$

Exempel 10: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}.$$

Det är lockande att försöka använda standardgränsvärde (4) här. Vi ser dock att vi har $\sin x$ i stället för x i uttrycket.

Låt oss fundera lite på vad standardgränsvärde (3) säger. Den upplyser oss om att kvoten mellan $\sin x$ och x närmar sig 1 då x blir litet. Detta innebär speciellt att $\sin x$ är ungefär lika stort som x för små värden på x. Det ligger därför nära till hands att prova substitutionen $t = \sin x$. Då $x \to 0$ kommer nu $t = \sin x \to \sin 0 = 0$.

$$\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \left(\begin{array}{l} t = \sin x \\ t = \sin x \to \sin 0 = 0 \text{ då } x \to 0 \end{array}\right) = \frac{e^{t}-1}{t} \to 1 \quad \text{då } x \to 0$$

$\square$

IV. Instängning av funktioner

Ibland är det dock inte möjligt att använda metoden med standardgränsvärden. Ett annat sätt att bestämma gränsvärden är att "stänga in" funktionen mellan två andra funktioner, vars gränsvärden vi kan beräkna. Då kan vi också dra slutsatser om gränsvärdet av den instängda funktionen.

Exempel 11: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}.$$

Funktionen $\sin\frac{1}{x}$ är en sinusfunktion, och därför vet vi att

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1.$$

Eftersom x^2 alltid är positiv kan vi dra slutsatsen att

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

för alla värden på x. Här ser vi att vår funktion är "instängd" mellan funktionerna $-x^2$ och x^2, och båda dessa funktioner går mot noll då $x \to 0$. Det finns då inget annat alternativ än att vår funktion också närmar sig noll, i.e.

$$x^2 \sin\frac{1}{x} \to 0 \quad \text{då } x \to 0.$$

□

Denna instängningsprincip fungerar även då $x \to \infty$, vilket illustreras i följande exempel:

Exempel 12: Låt oss tänka en situation där vi lyckats visa att funktionen $f(x)$ uppfyller

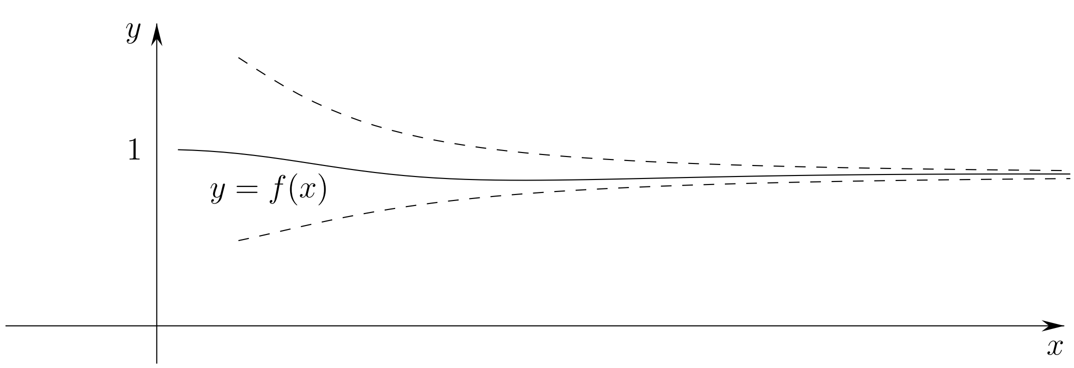
$$\frac{x^2+1}{x^2+2} \le f(x) \le \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

för alla x större än något visst tal (t.ex. $x \ge 0$). Vad blir då $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

Vi dividerar med nämnarens dominerande term (i.e. x^2) i båda funktionsuttrycken och får

$$\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} \le f(x) \le \frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Nu ser vi att $f(x)$ är instängd mellan två funktioner som båda går mot 1 då $x \to \infty$. Alltså kan vi dra slutsatsen att även $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$. Denna situation illusteras i figuren nedan:



□

V. Gränsvärden av typen " $\frac{a}{0}$ "

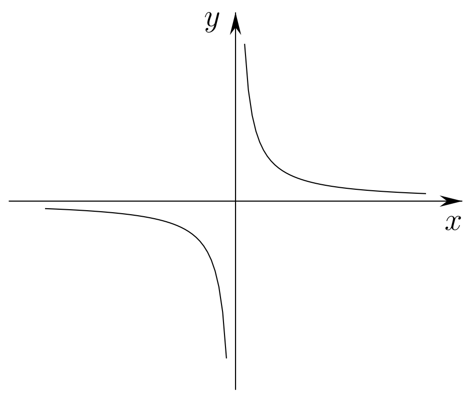
I fallet " $\frac{a}{0}$ ", där a är en konstant, får man iaktta extra försiktighet. Visserligen kan detta uttrycka ett väldigt stort tal, vilket tyder på att vi ska tolka det som oändligheten, men det kan också uttrycka minus oändligheten om nämnaren är negativ samtidigt som den närmar sig noll. (Tecknet på a spelar givetvis också roll.) Låt oss studera några exempel:

Exempel 13: Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Detta är ett gränsvärde av typen " $\frac{1}{0}$ ". Låt oss först betrakta fallet $x > 0$. När x då närmar sig 0, d.v.s. x närmar sig 0 från höger på tallinjen, är nämnaren hela tiden positiv, vilket betyder att " $\frac{1}{0}$ " ska tolkas som $+\infty$. Däremot om $x < 0$ och x därför närmar sig 0 från vänster på tallinjen tolkar vi uttrycket " $\frac{1}{0}$ " som $-\infty$. Gränsvärdet kan inte både vara $+\infty$ och $-\infty$ och slutsatsen blir att gränsvärde saknas då $x \to 0$.

Däremot existerar de s.k. *ensidiga* gränsvärdena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \text{“ } \frac{1}{0^+} \text{ “} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \text{“ } \frac{1}{0^-} \text{ “} = -\infty.$$



□

Exempel 14: Beräkna de ensidiga gränsvärdena då $x \to 2$ för $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$.

Med formella gränsvärdesräkningar får vi nu direkt

$$f(x) = \frac{1-x}{x-2} \to \begin{cases} \text{“ } \frac{1-2^+}{2^+-2} \text{ “} = \text{“ } \frac{-1}{0^+} \text{ “} = -\infty & \text{då } x \to 2^+ \\ \text{“ } \frac{1-2^-}{2^--2} \text{ “} = \text{“ } \frac{-1}{0^-} \text{ “} = +\infty & \text{då } x \to 2^- \end{cases}.$$

□