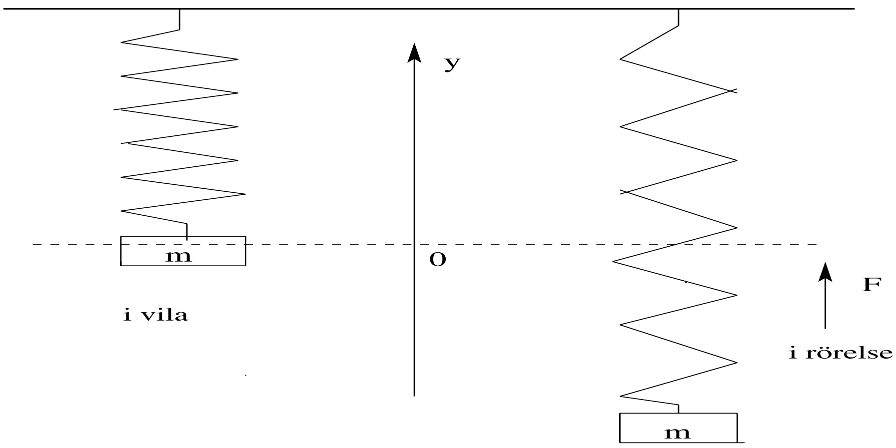
EN MATEMATISK MODELL
FÖR EN ENKEL SVÄNGNING.

Låt oss studera den enkla form av svängning, som sker, då en vikt hängande i en fjäder rör sig upp och ner.



Till vänster i bilden ser vi kroppen med massan m i vila. Den rör sig inte, dvs. inga resulterande krafter påverkar kroppen. Den befinner sig i jämviktsläget $y = 0$. Genom att föra kroppen nedåt motsvaras dess läge av ett negativt $y-$värde. Om vi nu släpper kroppen, börjar svängningsrörelsen. En kraft $\mathbf{F}$ driver kroppen tillbaka mot jämviktsläget, som den passerar med maximal (positiv) hastighet, vilken driver den vidare uppåt längs den positiva delen av $y-$axeln. Här möts den av en motriktad kraft som blir större ju högre upp kroppen kommer. Förr eller senare tar kraften överhanden, och tvingar kroppen att vända. Efter vändningen skjutsar kraften på kroppen, tills kroppen når nivå $y = 0$. Kroppen rör sig då med maximal (negativ) hastighet, men så fort den kommit ner till $y < 0$ verkar kraften mot rörelseriktningen, tills den ökande kraften återigen vänder på kroppen och skjutsar denna mot nollnivån, och förbi. Därefter upprepas exakt samma procedur om och om igen.
Om vi kan bortse från friktionen mot luften resp. i fjädern, så kommer svängningen att fortsätta kontinuerligt i all oändlighet. Amplituden, dvs. avståndet från jämviktsläget till vändpunkterna, kommer också att vara konstant. Man säger att svängningen är **harmonisk**.
Den matematiska tolkningen sker med hjälp av kraftekvationen $\mathbf{F} = m\ddot{y}$, där $\ddot{y}$ betyder kroppens acceleration, när den befinner sig i läget y. Vidare utnyttjar vi den s.k. fjäderekvation $\mathbf{F} = -ky$. $\mathbf{F}$ betyder här den fjäderkraft, som vill föra kroppen mot jämviktsläget. Fjäderkraften och accelerationskraften är lika. Detta innebär att, om vi ersätter den positiva konstanten k med $m\omega_0^2$, så

får vi differentialekvationen

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y \quad \text{eller bättre} \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0\,.$$

Karakteristiska ekvationen $m^2 + \omega_0^2 = 0$ har lösningarna $m_{1,2} = i\omega_0$. och den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t\,.$$

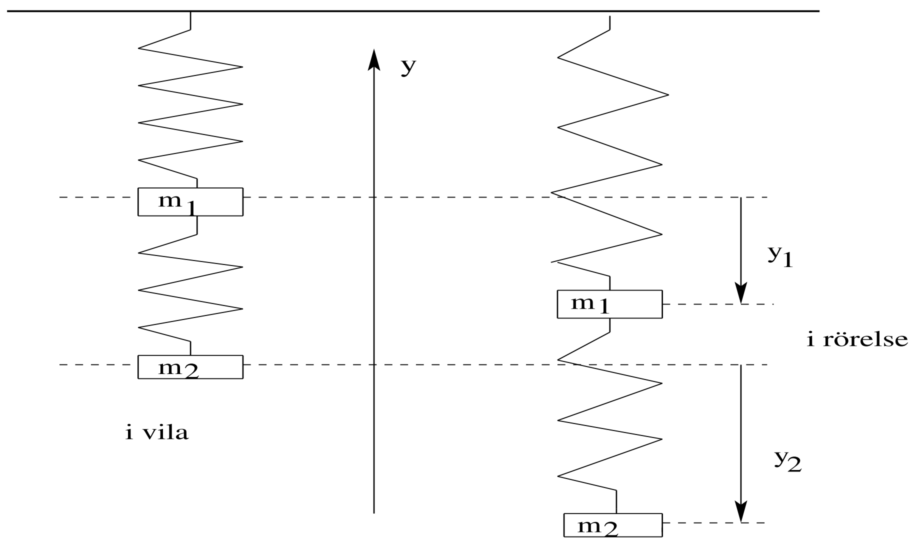
Genom att sätta $C_1 = A\sin\varphi$ och $C_2 = A\cos\varphi$ kan vi beskriva lösningen på **amplitud-fasvinkelform**. Den blir

$$y = A\sin(\omega_0 t + \varphi)\,.$$

Konstanten A är svängningens amplitud och $\omega_0 t + \varphi$ är fasvinkeln. Konstanten ω_0 kallar vi systemets **egenfrekvens**, dvs. den (vinkel-)frekvens med vilken systemet svänger utan påverkan från någon yttre kraft.

KOPPLAD HARMONISK SVÄNGNING.

låt oss nu studera en kropp med massan m_1 upphängd på en mekanisk fjäder med fjäderkonstanten k_1. Under denna vikt sitter ytterligare en fjäder, med fjäderkonstanten k_2, och på denna hänger ännu en kropp, med massan m_2.
Låt oss sträcka ut fjädrarna ett stycke. Då flyttas vikterna från sina jämviktslägen $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$, till $y_1 < 0$ resp. $y_2 < 0$.



Resonemanget som nu följer, har stora likheter med diskussionen ovan.
Den övre fjädern påverkar den övre kroppen med kraften $-k_1 y_1$. Den undre fjädern är utsträckt $y_2 - y_1$ enheter (relativt sin fästpunkt), så den påverkar den övre kroppen med kraften $k_2(y_2 - y_1)$, och den undre med kraften $-k_2(y_2 - y_1)$. Kropparna påverkas alltså av krafterna

$-k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)$ resp. $-k_2(y_2 - y_1)$. Dessa krafter måste balanseras av $m_1 \ddot{y}_1$ resp. $m_2 \ddot{y}_2$, vilket efter division med m_1 resp. m_2 ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 &= -\dfrac{k_1}{m_1} y_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(y_2 - y_1) \\ \ddot{y}_2 &= \qquad -\dfrac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1)\,. \end{cases}$$

Detta är ett linjärt system av andra ordningen. Vår teori för lösning av system gäller bara för linjära system av första ordningen, så vi gör om till ett sådant. Låt oss sätta: $y_2 = \dot{y}_1$ och $y_4 = \dot{y}_2$. Då får vi $\dot{y}_3 = \ddot{y}_1 = -\dfrac{k_1}{m_1} y_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(y_2 - y_1)$ och $\dot{y}_4 = \ddot{y}_2 = -\dfrac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1)$.
Systemet kan då skrivas som:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= & & & & y_3 & \\ \dot{y}_2 &= & & & & & y_4 \\ \dot{y}_3 &= & -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 & + & \dfrac{k_2}{m_1} y_2 & & \\ \dot{y}_4 &= & \dfrac{k_2}{m_2} y_1 & - & \dfrac{k_2}{m_2} y_2 & & \end{cases}$$

eller på matrisform:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$