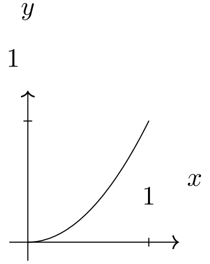
Viktiga tillämpningar av integraler

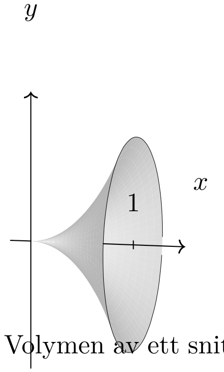
7.1.1 Finn volymen av kroppen S som genereras av rotation kring x-axeln av området Ω som begränsas av $y = x^2$, $y = 0$ och $x = 1$, medelst

a) snittning,

b) cylindriska skal.

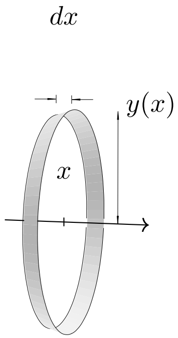
a) Vi ritar först upp området i planet och rotationskroppen.





Vi snittar nu upp kroppen S längs x-axeln. Volymen av ett snittelement är

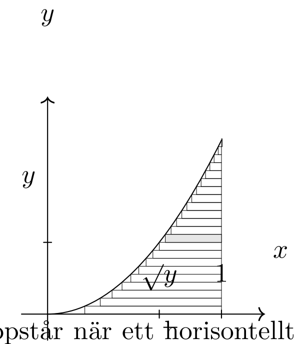
$$dV = \pi\, y(x)^2\, dx = \pi x^4\, dx.$$



Totala volymen fås som

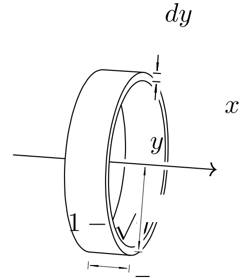
$$V = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 x^4\, dx = \tfrac{1}{5}\pi.$$

b) Vi använder cylindriska skal och snittar därför upp området i horisontella snitt.



Volymelementet som uppstår när ett horisontellt element roteras kring x-axeln är

$$dV = (1 - \sqrt{y}\,) \cdot 2\pi y\, dy.$$



Totala volymen är

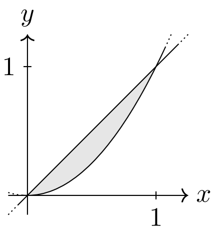
$$V = \int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 y(1 - \sqrt{y}\,)\, dy = 2\pi \left[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{2}{5}y^{5/2} \right]_0^1 = 2\pi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5}\right) = \tfrac{1}{5}\pi.$$

7.1.6 Finn volymen av kroppen som uppstår då det ändliga området R som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$ roteras kring

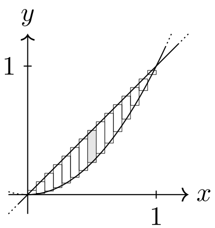
a) x-axeln,

b) y-axeln.

Vi ritar först upp det plana området R.

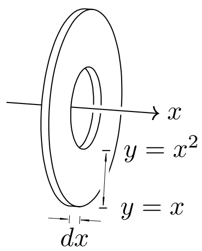


a) Eftersom begränsningskurvorna är givna i formen $y = y(x)$ är det enklast att snitta i x-led och låta varje element sedan rotera kring x-axeln.



Volymen av ett snittelement ges av

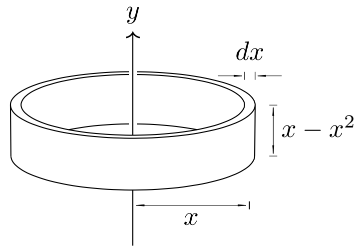
$$\begin{aligned} dV &= \pi x^2\,dx - \pi(x^2)^2\,dx \\ &= \pi(x^2 - x^4)\,dx. \end{aligned}$$



Den totala volymen är

$$V = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{2}{15}\pi.$$

b) Vi använder samma snittning längs x-axeln som i a-uppgiften och roterar sedan snittelementen kring y-axeln så att vi får cylindriska skal.



Snittelementets volym är

$$dV = \underbrace{2\pi x\,dx}_{\text{tvärsnitt}} \cdot \underbrace{(x - x^2)}_{\text{höjden}}.$$

Volymen ges av

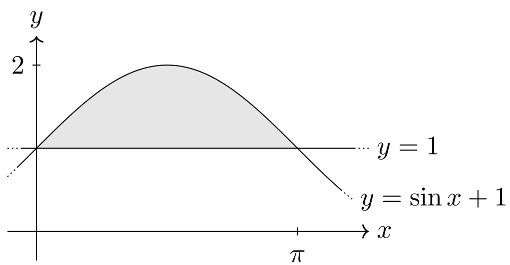
$$V = \int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 2\pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 2\pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{6}\pi.$$

7.1.8 Finn volymen av kroppen som uppstår då det ändliga området R som begränsas av $y = 1 + \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ och $x = \pi$, roteras kring

a) x-axeln,

b) y-axeln.

Vi ritar först upp området R.



a) Eftersom begränsningskurvorna är i formen $y = y(x)$ är det enklast att snitta längs x-axeln. Volymen av ett snittelement ges av

$$dV = \big(\pi(1+\sin x)^2 - \pi\cdot 1^2\big)\,dx = \pi(\sin^2 x + 2\sin x)\,dx.$$

Den totala volymen blir

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi dV = \pi\int_0^\pi (\sin^2 x - 2\sin x)\,dx \\ &= \pi\Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x - 2\cos x\Big]_0^\pi \\ &= \pi\Big(\tfrac{1}{2}\pi - 0 - 2\cdot(-1) - \big(0-0-2\big)\Big) = \tfrac{1}{2}\pi^2 + 4\pi. \end{aligned}$$

b) Vi använder cylindriska skal. Volymelementet blir

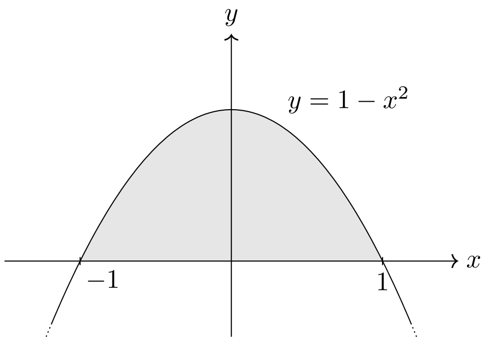
$$dV = 2\pi x\cdot(1+\sin x - 1)\,dx = 2\pi x\sin x\,dx.$$

Den totala volymen är

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi dV = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx \\ &= 2\pi\Big[\sin x - x\cos x\Big]_0^\pi \\ &= 2\pi\Big(0 - \pi\cdot(-1) - (0-0)\Big) = 2\pi^2. \end{aligned}$$

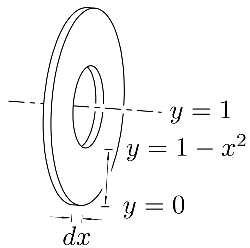
7.1.12 Finn volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le 1 - x^2$ roteras kring linjen $y = 1$.

Vi ritar upp området $0 \le y \le 1 - x^2$.



Vi snittar i x-led och roterar varje element kring linjen $y = 1$. Då blir snittelementets volym lika med

$$\begin{aligned} dV &= \pi\cdot 1^2\,dx - \pi(1-x^2)^2\,dx \\ &= \pi\big(1 - (1 + x^4 - 2x^2)\big)\,dx \\ &= \pi(2x^2 - x^4)\,dx. \end{aligned}$$

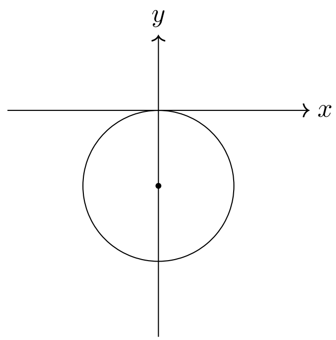


Den totala volymen är

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 dV = \pi\int_{-1}^1 (2x^2 - x^4)\,dx = \Big[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\Big]_{-1}^1 \\ &= \pi\big(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{5} - \big(-\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\big)\big) = \tfrac{14}{15}\pi. \end{aligned}$$

7.1.16 Finn volymen av den kropp som uppstår då en cirkulär disk roteras kring en av sina tangentlinjer.

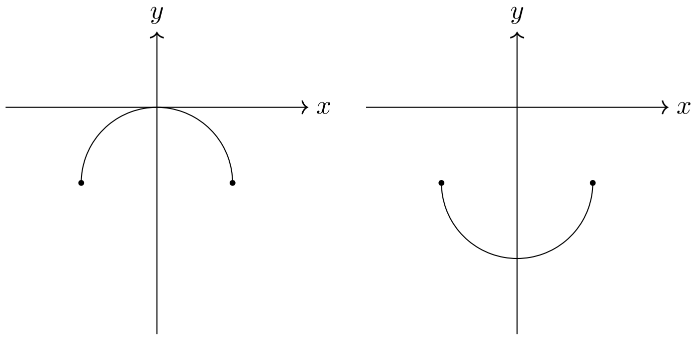
Låt oss placera disken i talplanet så att x-axeln blir en av diskens tangentlinjer. Vi kan också se till att diskens mittpunkt hamnar i punkten $(0, -R)$, där R är diskens radie.



En cirkel med radie R och mittpunkt i $(0, -R)$ har ekvationen

$$x^2 + (y+R)^2 = R^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -R \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Dessa två kurvor är



$y = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$ $\qquad$ $y = -R - \sqrt{R^2 - x^2}$

Vi ska nu räkna ut volymen som fås då området mellan dessa kurvor roteras kring x-axeln.

Vi snittar längs x-axeln. Snittelementets volym ges av

$$\begin{aligned} dV &= \pi\bigl(-R - \sqrt{R^2 - x^2}\,\bigr)^2\,dx \\ &\quad - \pi\bigl(-R + \sqrt{R^2 - x^2}\bigr)^2\,dx \\ &= 4\pi R\sqrt{R^2 - x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Den totala volymen ges av

$$V = \int dV = 4\pi R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

För att bestämma en primitiv funktion substituerar vi $x = R\sin\theta$,

$$\begin{aligned} 4\pi R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx &= \{\,x = R\sin\theta;\ \ dx = R\cos\theta\,d\theta\,\} \\ &= 4\pi R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}\,R\cos\theta\,d\theta \\ &= 4\pi R^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \{\,\text{formeln för dubbla vinkeln}\,\} \\ &= 2\pi R^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta = 2\pi R^3\Bigl[\,\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\,\Bigr]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 2\pi R^3\bigl(\tfrac{1}{2}\pi + 0 - (-\tfrac{1}{2}\pi + 0)\bigr) = 2\pi^2 R^3. \end{aligned}$$

7.2.1 En kropp är 2 m hög. Dess tvärsnittsarea på höjden x m ovanför basen är $3x$ m^2. Bestäm kroppens volym.

Om vi inför en x-axel i höjdled med $x = 0$ vid basplanet så kan kroppens tvärsnittsarea skrivas

$$A(x) = 3x.$$

Kroppens totala volym får vi genom att integrera upp tvärsnittsarean från $x = 0$ till $x = 2$,

$$\begin{aligned} \text{Volym} &= \int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 3x\,dx = \Bigl[\,\tfrac{3}{2}x^2\,\Bigr]_0^2 \\ &= \tfrac{3}{2}\cdot 2^2 - \tfrac{3}{2}\cdot 0^2 = 6. \end{aligned}$$

7.2.3 Bestäm volymen av en kropp med höjd 1 och vars tvärsnitt på höjden z ovanför basplanet är en ellips med halvaxlar z och $\sqrt{1 - z^2}$.

En ellips med halvaxlar $a = z$ och $b = \sqrt{1 - z^2}$ har arean

$$A(z) = \pi ab = \pi\cdot z\cdot\sqrt{1 - z^2}.$$

Detta ger att volymen av kroppen fås av integralen

$$\begin{aligned} \text{Volym} &= \int_0^1 A(z)\,dz = \int_0^1 \pi z\sqrt{1 - z^2}\,dz \\ &= \{\,s = 1 - z^2;\ \ ds = -2z\,dz\,\} = \frac{\pi}{2}\int_1^0 -\sqrt{s}\,ds \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{s}\,ds = \frac{\pi}{2}\Bigl[\,\tfrac{2}{3}s\sqrt{s}\,\Bigr]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

7.2.5 En kropp är 6 fot hög. Dess horisontella tvärsnitt vid höjden z ovanför basplanet är en rektangel med sidor $2+z$ fot och $8-z$ fot. Bestäm kroppens volym.

Enligt uppgiftstexten är tvärsnittsarean på höjden z fot över basplanet lika med

$$A(z) = (2+z)(8-z).$$

Kroppens volym får vi genom att integrera upp tvärsnittsarean från $z=0$ till $z=6$,

$$\begin{aligned}\text{Volym} &= \int_0^6 A(z)\,dz = \int_0^6 (2+z)(8-z)\,dz\\ &= \int_0^6 (16+6z-z^2)\,dz = \Bigl[\,16z+3z^2-\tfrac{1}{3}z^3\,\Bigr]_0^6\\ &= 16\cdot 6+3\cdot 6^2-\tfrac{1}{3}\cdot 6^3-\bigl(16\cdot 0+3\cdot 0-\tfrac{1}{3}\cdot 0^3\bigr)\\ &= 132 \text{ kubikfot.}\end{aligned}$$

7.3.4 Bestäm längden av kurvan $y^2=(x-1)^3$ från $(1,0)$ till $(2,1)$.

Om vi löser ut y ur kurvans ekvation får vi

$$y = \pm(x-1)^{3/2}.$$

Kurvan består alltså av två kurvstycken som är funktionsgrafen till

$$y(x) = +(x-1)^{3/2} \quad \text{respektive} \quad y(x) = -(x-1)^{3/2}.$$

Vi är bara intresserade av det kurvstycke som innehåller punkterna $(1,0)$ och $(2,1)$, och det är

$$y(x) = +(x-1)^{3/2}.$$

Båglängden av kurvan $y=y(x)$ från $x=1$ till $x=2$ ges av formeln

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (*)$$

För att bestämma derivatan y' deriverar vi det implicita sambandet mellan x och y i uppgiftstexten,

$$2yy' = 3(x-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad y' = \frac{3}{2}\,\frac{(x-1)^2}{y}.$$

Dessutom är y' kvadrerad i båglängdsformeln $(*)$,

$$(y')^2 = \frac{9}{4}\,\frac{(x-1)^4}{y^2}.$$

Högerledet kan vi förenkla genom att åter använda det implicita sambandet,

$$= \frac{9}{4}\,\frac{(x-1)^4}{(x-1)^3} = \tfrac{9}{4}(x-1).$$

Båglängden blir

$$\begin{aligned}L &= \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}(x-1)}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\tfrac{9}{4}x-\tfrac{5}{4}}\,dx\\ &= \bigl\{\,t=\tfrac{9}{4}x-\tfrac{5}{4};\ dt=\tfrac{9}{4}\,dx\,\bigr\} = \frac{4}{9}\int_1^{13/4} \sqrt{t}\,dt\\ &= \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}\Bigl[\,t\sqrt{t}\,\Bigr]_1^{13/4} = \tfrac{8}{27}\bigl(\tfrac{13}{8}\sqrt{13}-1\bigr) = \tfrac{13}{27}\sqrt{13}-\tfrac{8}{27}.\end{aligned}$$

7.3.8 Bestäm längden av kurvan $y = \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$ från $x=1$ till $x=2$.

Längden av kurvan ges av formeln

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

För att kunna räkna ut integralen behöver vi y:s derivata,

$$y' = x^2-\frac{1}{4x^2} \quad\Rightarrow\quad (y')^2 = \Bigl(x^2-\frac{1}{4x^2}\Bigr)^2 = x^4-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}.$$

Kurvans längd blir alltså

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}}\,dx.$$

Nu råkar det vara så att uttrycket under rottecknet är en kvadrat,

$$x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} = \Bigl(x^2 + \frac{1}{4x^2}\Bigr)^2.$$

Båglängden blir alltså

$$L = \int_1^2 \Bigl| x^2 + \frac{1}{4x^2} \Bigr|\,dx = \Bigl[\, \tfrac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x} \,\Bigr]_1^2 = \tfrac{59}{24}.$$

7.3.11 Bestäm längden av kurvan

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (= \cosh x)$$

från $x = 0$ till $x = a$.

Längden av kurvan ges av formeln

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

där

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad (y')^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}.$$

Alltså är

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\bigl(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\bigr)}\,dx = \int_0^a \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}\,dx.$$

Här har vi, liksom i förra uppgiften, turen att observera att uttrycket under rottecknet är en kvadrat,

$$e^{2x} + 2 + e^{-2x} = (e^x + e^{-x})^2.$$

Båglängdsintegralen blir

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \tfrac{1}{2}\bigl|e^x + e^{-x}\bigr|\,dx = \tfrac{1}{2}\Bigl[\, e^x - e^{-x} \,\Bigr]_0^a \\ &= \tfrac{1}{2}\bigl(e^a - e^{-a} - (1-1)\bigr) = \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a}). \end{aligned}$$

Anm. Om vi räknar med de hyperboliska funktionerna så blir räkningarna lite kompaktare

$$\begin{aligned} L &= \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \{\, y' = \sinh x \,\} = \int_0^a \sqrt{1 + \sinh^2 x}\,dx \\ &= \{\, \text{den hyperboliska ettan: } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \,\} \\ &= \int_0^a |\cosh x|\,dx = \Bigl[\, \sinh x \,\Bigr]_0^a = \sinh a = \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a}). \end{aligned}$$

7.3.20 Bestäm arean av den yta som uppstår då kurvan $y = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = 2$, roteras kring y-axeln.

Arean ges av formeln

$$A = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

där $y'(x) = 2x$. Alltså är

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \{\, t = 1 + 4x^2;\ dt = 8x\,dx \,\} \\ &= \tfrac{1}{4}\pi \int_1^{17} \sqrt{t}\,dt = \tfrac{1}{6}\pi \Bigl[\, t\sqrt{t} \,\Bigr]_1^{17} \\ &= \tfrac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

Anm. Extraproblem: Vad blir arean om kurvstycket istället roteras kring x-axeln?