

**SF1625 Envariabelanalys för CDATE1**  
**Kontrollskrivning 1, version A, 2009-11-13**

Varje uppgift är värd tre poäng. Fem KS-poäng garanterar minst tre poäng på uppgift 1 på tentamen. Sju KS-poäng ger fyra poäng på uppgift 1 på tentamen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Motivera dina svar noggrant. Skrivtid: **15:15–16:15**.

1. Antar funktionen  $f(x) = e^{1+\sqrt{x}-x}$  något globalt maxvärde? Ange i så fall detta funktionsvärde.

2. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{3x^3}.$$

3. En racerbana i  $xy$ -planet följer kurvan som ges av  $x^4 + y^4 = 1 + x \sin(y)$ . I punkten  $(-1, 0)$  finns en oljefläck som gör att en bil halkar av och flyger i tangentens riktning tills den kraschar i muren  $y = 2$ . I vilken punkt sker kraschen?

**SF1625 Envariabelanalys för CDATE1**  
**Kontrollskrivning 1, version B, 2009-11-13**

Varje uppgift är värd tre poäng. Fem KS-poäng garanterar minst tre poäng på uppgift 1 på tentamen. Sju KS-poäng ger fyra poäng på uppgift 1 på tentamen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Motivera dina svar noggrant. Skrivtid: **15:15–16:15**.

1. Antar funktionen  $f(x) = e^{2-\sqrt{x}+x}$  något globalt minvärde? Ange i så fall detta funktionsvärde.

2. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{2x^3}.$$

3. En racerbana i  $xy$ -planet följer kurvan som ges av  $x^4 + y^4 = 1 + x \sin(y)$ . I punkten  $(1, 0)$  finns en oljefläck som gör att en bil halkar av och flyger i tangentens riktning tills den kraschar i muren  $y = -3$ . I vilken punkt sker kraschen?

## Lösningsförslag

**A1.** Derivering ger

$$f'(x) = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \right) e^{1+\sqrt{x}-x},$$

varför  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/4$ . Vi har  $f'(x) > 0$  om  $0 < x < 1/4$  och  $f'(x) < 0$  om  $x > 1/4$ , så  $f(x)$  är växande på  $[0, 1/4]$  och avtagande på  $[1/4, \infty)$ , varför  $f$  har ett globalt max i  $x = 1/4$ . Detta maxvärde är  $f(1/4) = e^{5/4}$ .

**A2.** Gränsvärdet är av typ  $[0/0]$ . Vi använder l'Hospitals regel upprepade gånger och får

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{18x} = \frac{1}{18}.$$

**A3.** Vi söker först en ekvation för tangenten. Implicit derivering av sambandet  $x^4 + y^4 = 1 + x \sin(y)$  med avseende på  $x$  ger

$$4x^3 + 4y^3 y' = \sin(y) + xy' \cos(y).$$

Insättning av punkten  $(x, y) = (-1, 0)$  ger

$$-4 + 0 = 0 - y',$$

så tangentens lutning är 4 och tangentens ekvation därmed  $y = 4x + 4$ . Den sökta punkten är tangentens skärning med linjen  $y = 2$ , nämligen  $(-1/2, 2)$ .

**B1.** Derivering ger

$$f'(x) = \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^{2-\sqrt{x}+x},$$

varför  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/4$ . Vi har  $f'(x) < 0$  om  $0 < x < 1/4$  och  $f'(x) > 0$  om  $x > 1/4$ , så  $f(x)$  är avtagande på  $[0, 1/4]$  och växande på  $[1/4, \infty)$ , varför  $f$  har ett globalt min i  $x = 1/4$ . Detta minvärde är  $f(1/4) = e^{7/4}$ .

**B2.** Gränsvärdet är av typ  $[0/0]$ . Vi använder l'Hospitals regel upprepade gånger och får

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{12x} = -\frac{1}{12}.$$

**B3.** Vi söker först en ekvation för tangenten. Implicit derivering av sambandet  $x^4 + y^4 = 1 + x \sin(y)$  med avseende på  $x$  ger

$$4x^3 + 4y^3 y' = \sin(y) + xy' \cos(y).$$

Insättning av punkten  $(x, y) = (1, 0)$  ger

$$4 + 0 = 0 + y',$$

så tangentens lutning är 4 och tangentens ekvation därmed  $y = 4x - 4$ . Den sökta punkten är tangentens skärning med linjen  $y = -3$ , nämligen  $(1/4, -3)$ .