KTH Matematik
Axel Hultman

SF1625 Envariabelanalys för CDATE1
Kontrollskrivning 2, version A, 2009-11-26

Varje uppgift är värd tre poäng. Fem KS-poäng garanterar minst tre poäng på uppgift 2 på tentamen. Sju KS-poäng ger fyra poäng på uppgift 2 på tentamen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Motivera dina svar noggrant. Skrivtid: **10:15–11:15**.

1. Beräkna integralen

$$\int_0^2 x^3 \sin(x^4) dx.$$

2. Visa olikheten

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{3}\left(1 + e^{-1/9} + e^{-4/9}\right).$$

Tips. Tolka högerledet som en (övre) Riemannsumma.

3. En väg i xy-planet följer kurvan $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$. En bil startar sin färd i punkten $(x, y) = (1, 0)$. Om tanken räcker för 42 längdenheters färd, i vilken punkt tar bränslet slut?

KTH Matematik
Axel Hultman

SF1625 Envariabelanalys för CDATE1
Kontrollskrivning 2, version B, 2009-11-26

Varje uppgift är värd tre poäng. Fem KS-poäng garanterar minst tre poäng på uppgift 2 på tentamen. Sju KS-poäng ger fyra poäng på uppgift 2 på tentamen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Motivera dina svar noggrant. Skrivtid: **10:15–11:15**.

1. Beräkna integralen
$$\int_0^2 x^3 \cos(x^4) dx.$$

2. Visa olikheten
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{1}{3}\left(e^{-1/9} + e^{-4/9} + e^{-1}\right).$$
Tips. Tolka högerledet som en (undre) Riemannsumma.

3. En väg i xy-planet följer kurvan $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$. En bil startar sin färd i punkten $(x, y) = (1, 0)$. Om tanken räcker för 42 längdenheters färd, i vilken punkt tar bränslet slut?

Lösningsförslag

A1. Substitutionen $u = x^4$ ger $du = 4x^3dx$. Då x går från 0 till 2 går u från 0 till 16, varför

$$\int_0^2 x^3 \sin(x^4)dx = \frac{1}{4}\int_0^{16} \sin(u)du = \frac{1}{4}\left[-\cos(u)\right]_0^{16} = \frac{1-\cos(16)}{4}.$$

A2. Integranden $f(x) = e^{-x^2}$ är avtagande då $x \geq 0$, så maximum på ett slutet intervall antas i vänster ändpunkt. Om $[0, 1]$ delas upp i tre lika stora delar, kommer den övre Riemannsumman därför att vara

$$\frac{1}{3}\left(f(0) + f(1/3) + f(2/3)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + e^{-1/9} + e^{-4/9}\right).$$

Detta värde är alltså en övre begränsning för integralen.

A3. Den tillryggalagda sträckan längs grafen $y = f(x)$ från $x = 1$ till $x = a$ ges av

$$L = L(a) = \int_1^a \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

I vårt fall har vi $f'(x) = \sqrt{x-1}$, så

$$L = \int_1^a \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^a = \frac{2}{3}\left(a^{3/2} - 1\right).$$

Då $L = 42$ får vi $a^{3/2} = 3(42 + 2/3)/2 = 64$ och därmed $a = 64^{2/3} = 16$. Punkten på vägen med x-koordinat 16 har y-koordinat $2 \cdot 15^{3/2}/3 = 10\sqrt{15}$.

Svar: $(16, 10\sqrt{15})$.

B1. Substitutionen $u = x^4$ ger $du = 4x^3dx$. Då x går från 0 till 2 går u från 0 till 16, varför

$$\int_0^2 x^3 \cos(x^4)dx = \frac{1}{4}\int_0^{16} \cos(u)du = \frac{1}{4}\left[\sin(u)\right]_0^{16} = \frac{\sin(16)}{4}.$$

B2. Integranden $f(x) = e^{-x^2}$ är avtagande då $x \geq 0$, så minimum på ett slutet intervall antas i höger ändpunkt. Om $[0, 1]$ delas upp i tre lika stora delar, kommer den undre Riemannsumman därför att vara

$$\frac{1}{3}\left(f(1/3) + f(2/3) + f(1)\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-1/9} + e^{-4/9} + e^{-1}\right).$$

Detta värde är alltså en undre begränsning för integralen.

B3. Se A3.